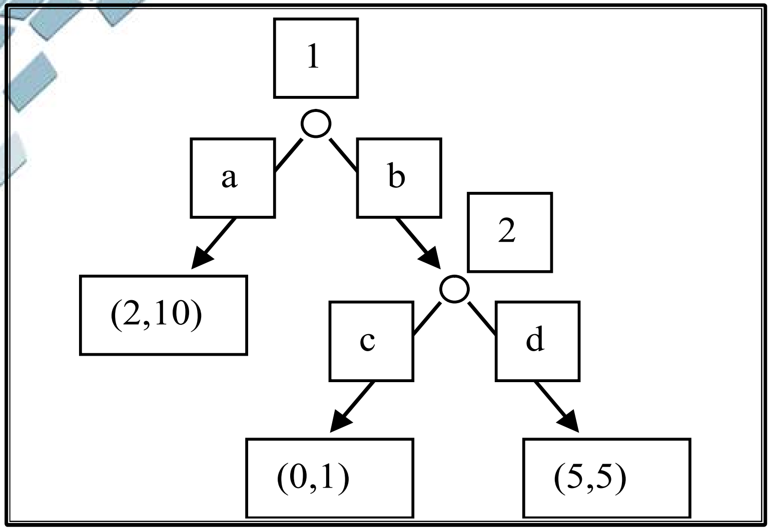
CORECON-RJ
CONSELHO REGIONAL DE ECONOMIA

ANPEC - Microeconomia
Dúvidas – Teoria dos Jogos

Prof. Antonio Carlos Assumpção

QUESTÃO 15 - 2000

Considere o jogo na forma extensiva apresentado a seguir.



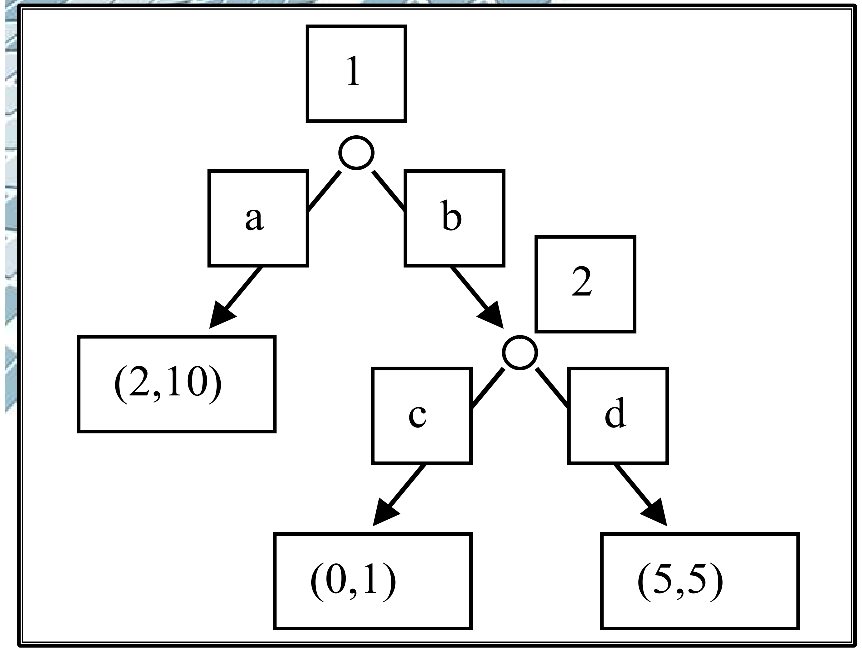
(0) O perfil de estratégias (a,c) é um equilíbrio de Nash. V

(1) O perfil de estratégias (b,c) é um equilíbrio de Nash. F

(2) Num equilíbrio de Nash perfeito em subjogos o jogador 2 jogará sempre c. F

(3) Existem dois equilíbrios de Nash nesse jogo. V

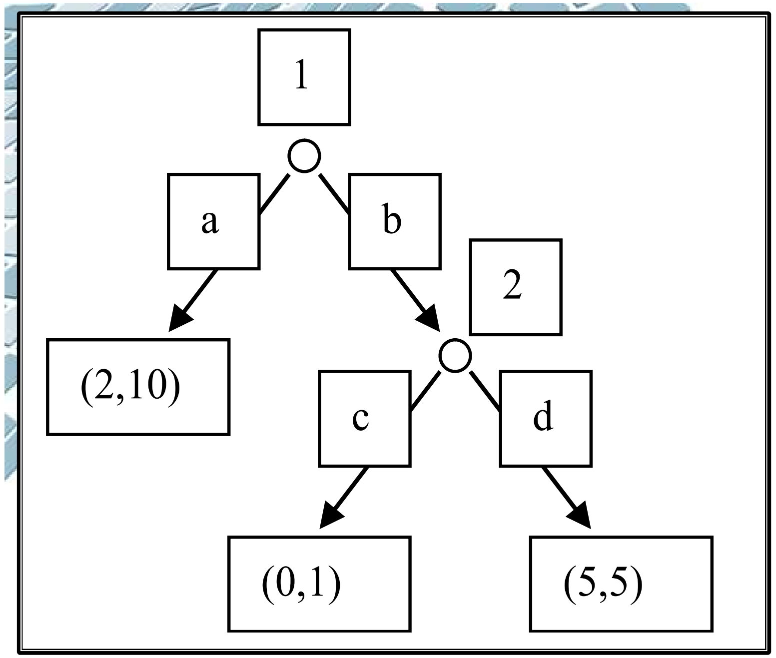
(4) Todo equilíbrio de Nash desse jogo é perfeito em subjogos. F



Na forma normal (Jogo Simultâneo)

		J2	
		c	**d**
J1	**a**	2 , 10	2 , 10
	b	0 , 1	5 , 5

- Logo, temos dois equilíbrios de Nash em estratégias puras (a,c) e (b,d).
- **Portanto, o item (0) é V , o item (1) é F e o item (3) é V.**



- Vamos resolver por indução retroativa.
  - No jogo sequencial, com o jogador 1 jogando primeiro, temos:

- Se o jogador 1 jogar b o jogador 2 jogará d. Nesse caso, teremos **(5,5), que é o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Logo, o jogador 2 joga d. (b,d)**
- Observe que o jogador 1 não escolherá a estratégia a, pois nesse caso ele teria um *payoff* de 2.
- Note também que **(4) é falso**, pois temos dois equilíbrios de Nash e apenas (b,d) é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Questão 11- 2003

Considere um jogo na forma normal resumido em termos da seguinte matriz de ganhos:

		Jogador 2	
		L	R
Jogador 1	U	3,1	α,0
	D	0,0	β,β

(0) Para β = 1, U é uma estratégia dominante para o jogador 1 desde que α > 1. **V**

	Jogador 2		
Jogador 1		**L**	**R**
	U	$\boxed{3}$, $\boxed{1}$	$\boxed{\alpha > 1}$, 0
	D	0 , 0	$\beta = 1$, $\boxed{\beta = 1}$

- Se J2 escolhe L → J1 escolhe U.
- Se J2 escolhe R → J1 escolhe U, caso a > 1 (sendo b = 1).
  - Logo, caso se β = 1 e α > 1, temos um único equilíbrio de Nash com estratégias puras, com J1 jogando U sempre.

(1) Para α = 2 e β = 1, existe um único equilíbrio de Nash em estratégias puras. **V : Como acabamos de ver.**

(2) Para $\alpha = 7$ e $\beta = 6$, o equilíbrio de Nash em estratégias puras é Pareto eficiente. **F**

		Jogador 2	
		L	**R**
Jogador 1	**U**	$\boxed{3}$, $\boxed{1}$	$\boxed{7}$, 0
	D	0 , 0	**6 ,** $\boxed{6}$

- Nesse caso temos um único equilíbrio de Nash com estratégias puras, mas ele não é Pareto-Eficiente !
- Observe que os dois jogadores poderiam estar em uma situação melhor caso J1 escolhesse D e J2 escolhesse R.

(3) Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, existe um equilíbrio de Nash em estratégias mistas no qual o jogador 1 joga U com probabilidade 1/2 e o jogador 2 joga L com probabilidade ½. **F**

	Jogador 2		
Jogador 1		**L**	**R**
	U	$\boxed{3}$, $\boxed{1}$	$\boxed{\mathbf{2}}$, 0
	D	0 , 0	**1** , $\boxed{\mathbf{1}}$

- Observe que a estratégia U é dominante para o J1. Logo, J1 escolhe a estratégia U 100% das vezes.
- Como J2 sabe disso, ele pensará da seguinte forma: dado que J1 jogará U (necessariamente), devo jogar L sempre (100% das vezes).
- **Logo, J1 joga U com probabilidade 1 e J2 joga L com probabilidade 1.**

(4) Para $\alpha = 7$ e $\beta = 6$, caso o jogo seja repetido duas vezes, no equilíbrio perfeito em subjogos, as utilidades finais dos jogadores são (6,2). **V**

	Jogador 2		
Jogador 1		**L**	**R**
	U	$\boxed{3}$, $\boxed{1}$	$\boxed{7}$, 0
	D	0 , 0	**6** , $\boxed{6}$

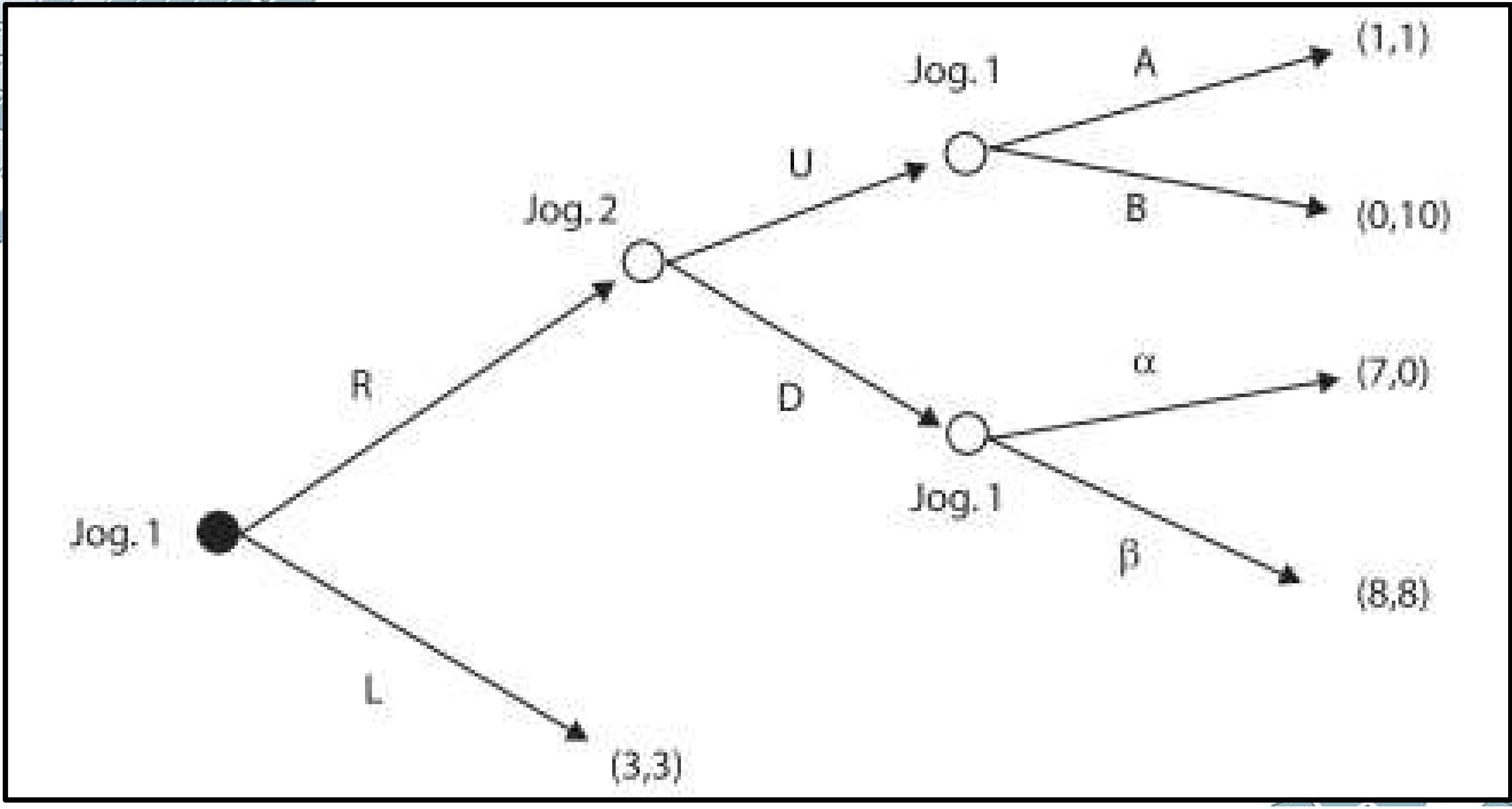
- Como vimos, jogando uma única vez, temos um equilíbrio de Nash que não é eficiente, pois os dois jogadores poderiam melhorar caso a escolha fosse (D,R).
- Caso o jogo fosse jogado infinitas vezes poderia haver cooperação, mas isso não ocorre nesse caso.
  - Eles jogarão (U,L) duas vezes e, com isso, os *payoffs* dos dois jogadores será 2 x (3 , 1) = (6 , 2).

	Jogador 2		
Jogador 1		L	R
	U	3 , 1	**7** , 0
	D	0 , 0	**6 , 6**

- Se houver cooperação teremos (D,R) ocorrendo duas vezes → (12 , 12).
- Com apenas duas rodadas, não existe a possibilidade de retaliação na terceira rodada. Isso pode levar o jogador 1 a escolher U na segunda rodada (nesse caso ele ganharia 13). Mas se ele pensar assim já na primeira rodada, tentando obter um payoff de 14 ?
- Nesse caso ele induzirá o jogador 2 a jogar L, terminando com um payoff igual a 2 > 0.
- Logo, considerando rodadas finitas, teremos (U , L).

Questão 12 - 2003

Considere o seguinte jogo com 2 jogadores: jogador 1 e jogador 2.

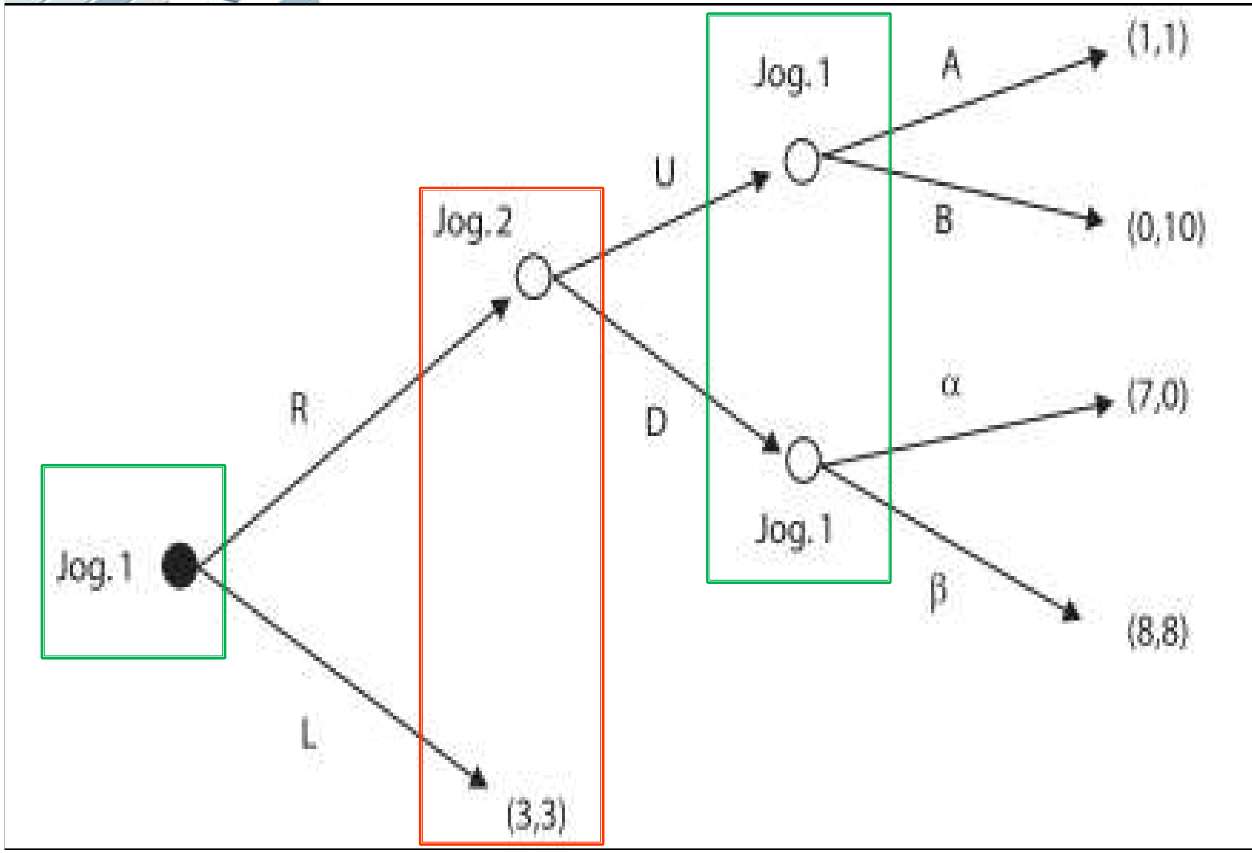


Analise as questões abaixo:

(0) Neste jogo há somente 2 equilíbrios de Nash em estratégias puras.

- **O gabarito da ANPEC é F**. Como veremos, podemos responder que existem **cinco equilíbrios de Nash ou dois**.

- Vamos representar o jogo na sua forma normal, notando que **J1 realiza a primeira escolha**, **J2 joga em seguida (U ou D)** e, na sequência, **J1 retorna ao jogo.**



		J2	
		U	D
J1	RAα	1 , 1	7 , 0
	RAβ	1 , 1	8 , 8
	RBα	0 , 10	7 , 0
	RBβ	0 , 10	8 , 8
	LAα	3 , 3	3 , 3
	LAβ	3 , 3	3 , 3
	LBα	3 , 3	3 , 3
	LBβ	3 , 3	3 , 3

		J2	
		U	D
J1	RAα	1 , $\boxed{1}$	7 , 0
	RAβ	1 , 1	$\boxed{8}$, $\boxed{8}$
	RBα	0 , $\boxed{10}$	7 , 0
	RBβ	0 , $\boxed{10}$	$\boxed{8}$, 8
	LAα	$\boxed{3}$, $\boxed{3}$	3 , $\boxed{3}$
	LAβ	$\boxed{3}$, $\boxed{3}$	3 , $\boxed{3}$
	LBα	$\boxed{3}$, $\boxed{3}$	3 , $\boxed{3}$
	LBβ	$\boxed{3}$, $\boxed{3}$	3 , $\boxed{3}$

Considerando a lista completa de escolhas, temos 5 equilíbrios de Nash.

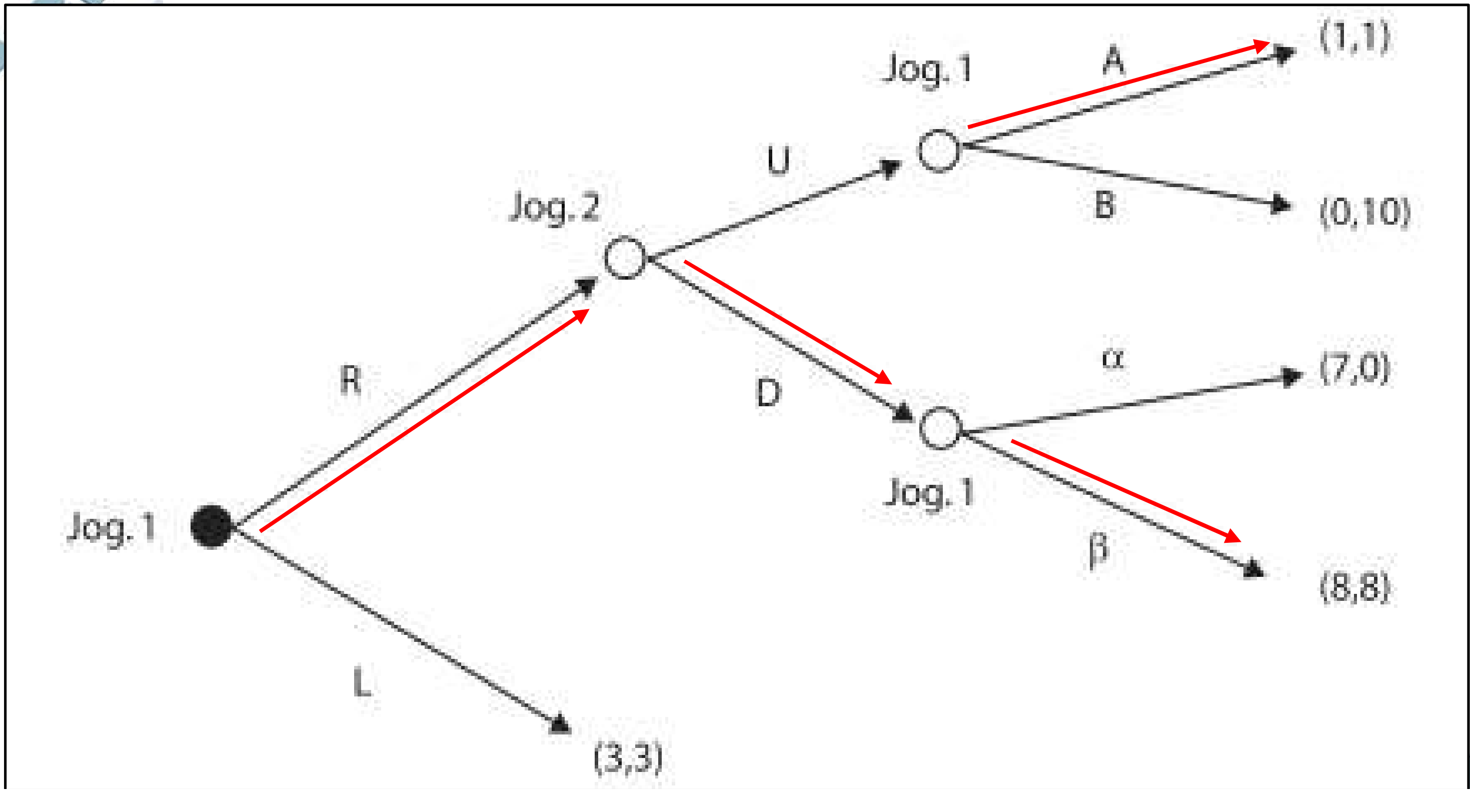
Observe que, caso J1 **escolha L**, o jogo termina (J2 não joga). Nesse caso, teremos (3,3).

- Portanto, seria correto dizer que existem 2 equilíbrios de Nash.

- As estratégias indicam o que os agentes econômicos pretendem fazer em cada nó de decisão ao longo do jogo.
- **Jogador 2**
  - **Estratégia 1 →** Jogar U (depois que J1 joga)
  - **Estratégia 2 →** Jogar D (depois que J1 joga)
- **Jogador 1**
  - **Estratégia 1 →** Jogar RA dado que o jogador 2 jogou U, e jogar Rα dado que o jogador 2 jogou D **(RAα).**
  - **Estratégia 2 →** Jogar RA dado que o jogador 2 jogou U, e jogar Rβ dado que o jogador 2 jogou D **(RAβ).**
  - **Estratégia 3 →** Jogar RB dado que o jogador 2 jogou U, e jogar Rα dado que o jogador 2 jogou D **(RBα).**
  - **Estratégia 4 →** Jogar RB dado que o jogador 2 jogou U, e jogar Rβ dado que o jogador 2 jogou D **(RBβ).**
  - **Estratégia 5 →** Jogar L

(1) Todos os equilíbrios de Nash em estratégias puras deste jogo são também equilíbrios perfeitos em subjogos. **F**

- Cada subjogo apresenta um equilíbrio de Nash, mas somente a combinação de estratégias (RAβ , D) representa um ENPS.



(2) Em qualquer equilíbrio perfeito em subjogos, a estratégia *U* não é jogada pelo jogador 2. **V**

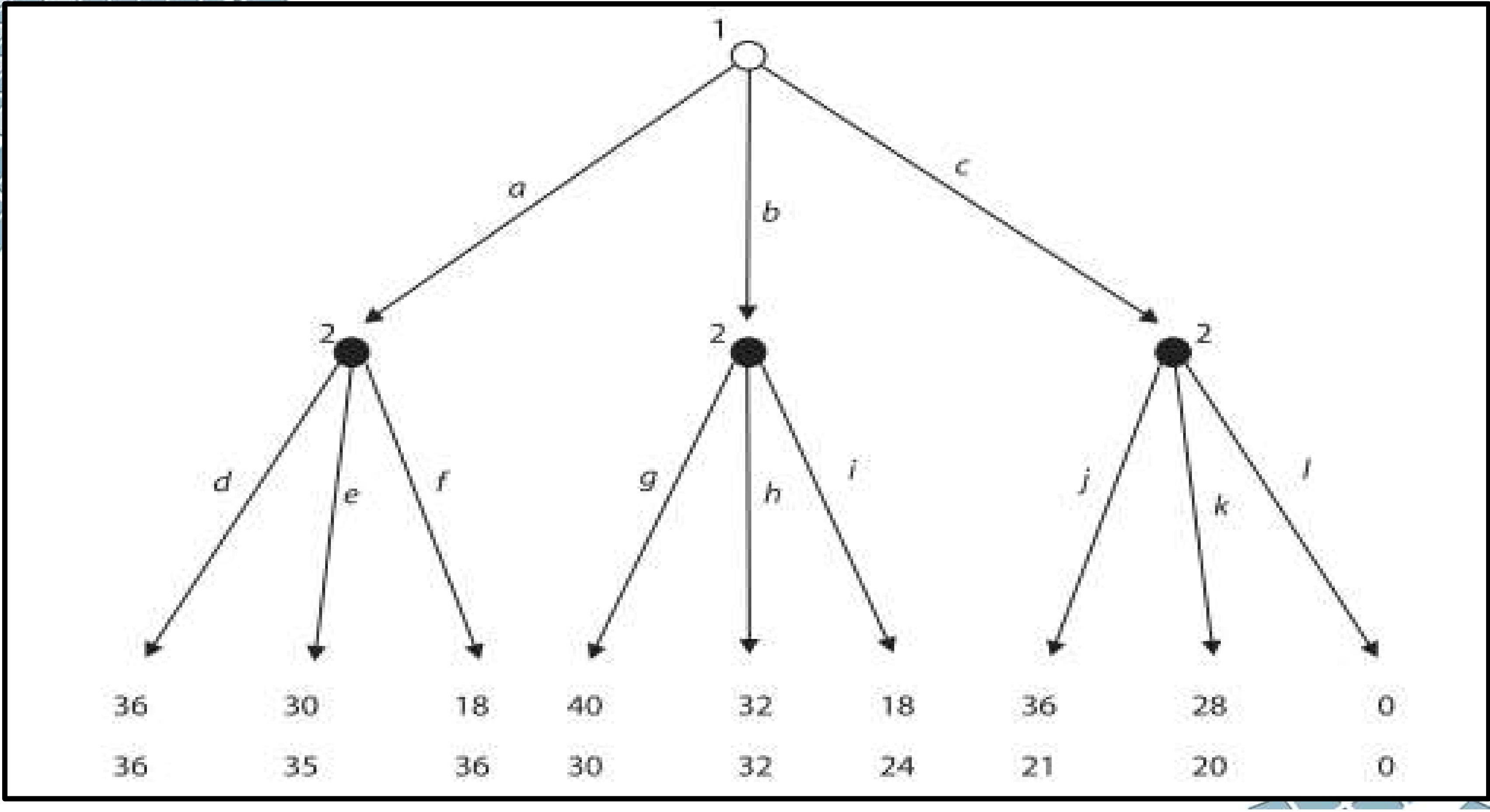
- Como acabamos de ver, a estratégia U não é jogada.

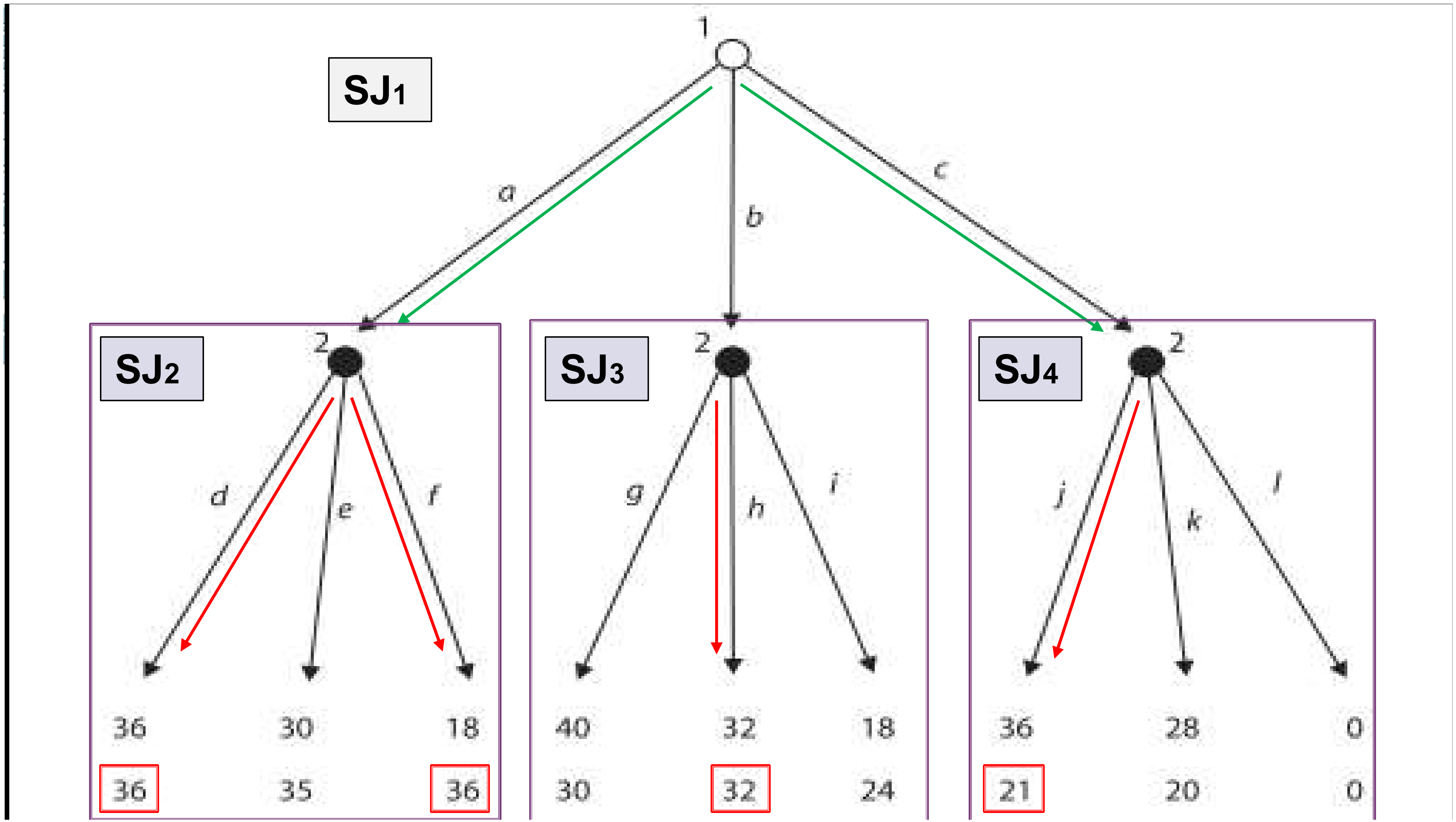
(3) O par de estratégias {*RA*β*, D*} é um equilíbrio perfeito em subjogos. **V**

(4) O *payoff* (1,1) resulta de estratégias que constituem um equilíbrio de Nash. **F**

Questão 11 - 2005

Com base no jogo na forma extensiva apresentado abaixo, é correto dizer que:





SJ1
1
a
b
c
SJ2
2
d
e
f
36 30 18
36 35 36
SJ3
2
g
h
i
40 32 18
30 32 24
SJ4
2
j
k
l
36 28 0
21 20 0

- Temos quatro equilíbrios de Nash perfeito em subjogos:
  - {a , (d,h,j)}
  - {a , (f,h,j)}
  - {c , (d,h,j)}
  - {c , (f,h,j)}

(0) O perfil de estratégias (*a*, (*d*, *h*, *k*)) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. **F**

- No subjogo 4 o jogador 2 não escolhe k.

(1) O perfil de estratégias (*b*, (*f*, *h*, *l*)) corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. **V**

Trata-se de um equilíbrio de Nash: caso J1 escolha b, a melhor resposta de J2 é h.

(2) Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos. **F**

Todo ENPS é um equilíbrio de Nash, mas o contrário não é verdade. Como vimos no item anterior, o perfil de estratégias (*b*, (*f*, *h*, *l*)) é um equilíbrio de Nash, mas não é um ENPS.

(3) O perfil de estratégias (*c*, (*f*, *h*, *j*)) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. **V**

- ENPS : {c , (f,h,j)} , {a , (d,h,j)} , {a , (f,h,j)} e {c , (d,h,j)}.

(4) Todo jogo na forma extensiva com informação completa possui um único equilíbrio perfeito em subjogos, que pode ser obtido pelo algoritmo de indução retroativa. **F**

- Como acabamos de ver, esse jogo possui 4 ENPS.

Questão 12 – 2005

Considere o seguinte jogo conhecido como a Batalha Dos Sexos. Nesse jogo, ele prefere ir ao futebol e ela ao *shopping*. Porém, entre a opção de desfrutarem do lazer sozinhos ou acompanhados, ambos preferem estar acompanhados. Com base na teoria dos jogos, julgue as afirmativas.

		Ele	
		Shopping	Futebol
Ela	*Shopping*	3, 2	0, 0
	Futebol	0, 0	2, 3

(0) Como para todos os jogos não cooperativos, a solução deste jogo envolve um equilíbrio de estratégias dominantes. **F**

(1) Este jogo caracteriza-se por possuir dois equilíbrios de Nash em estratégias puras. **V**

- No jogo Batalha dos Sexos temos 2 equilíbrios em estratégias puras, mas não existe estratégia dominante para nenhum dos jogadores.
  - Sendo J1 = Ela, J2 = Ele, (A,a) Shopping-Shopping e (B,b) = Futebol-Futebol.

		Jogador 2	
		a	b
Jogador 1	A	(3 , 2)	(0 , 0)
	B	(0 , 0)	(2 , 3)

(2) O equilíbrio de Nash em estratégias mistas para este jogo é para Ela (*Shopping*: 3/5; Futebol: 2/5) e para Ele (*Shopping*: 2/5; Futebol: 3/5). **V**

		J2	
		β a	b $(1-\beta)$
J1	α A	(3 , 2)	(0 , 0)
	$(1-\alpha)$ B	(0 , 0)	(2 , 3)

- Em vez de jogar puramente A ou B, os jogadores podem "misturar" as estratégias → selecionam uma distribuição de probabilidade buscando a maximização do *payoff* esperado.

Agente $\boldsymbol{J_1}$

$$UE_{J1} = 3\alpha\beta + 0\alpha\left(1-\beta\right) + 0\left(1-\alpha\right)\beta + 2\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)$$

$$UE_{J1} = 3\alpha\beta + 2\left(1-\beta-\alpha+\alpha\beta\right) \rightarrow 3\alpha\beta + 2 - 2\beta - 2\alpha + 2\alpha\beta$$

$$UE_{J1} = 5\alpha\beta + 2 - 2\beta - 2\alpha$$

$$\frac{\partial UE_{J1}}{\partial\alpha} = 0 \Rightarrow 5\beta - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{2}{5}}$$

J_2 joga **a** com probabilidade de 2/5.

Agente J_2

$$UE_{J2} = 2\alpha\beta + 0\alpha\left(1-\beta\right) + 0\left(1-\alpha\right)\beta + 3\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)$$

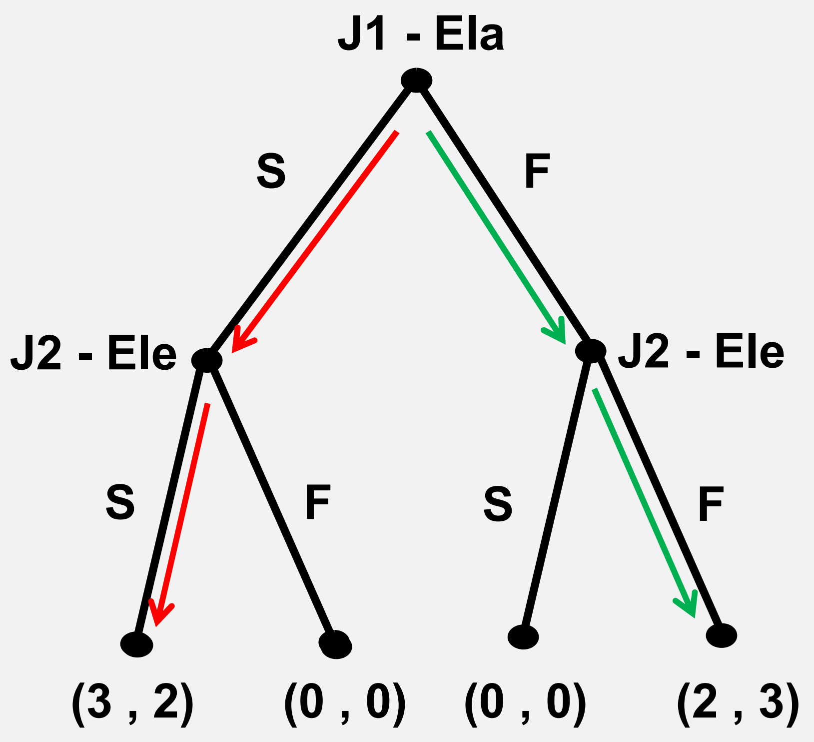
$$UE_{J2} = 2\alpha\beta + 3\left(1-\beta-\alpha+\alpha\beta\right) \rightarrow 2\alpha\beta + 3 - 3\beta - 3\alpha + 3\alpha\beta$$

$$UE_{J2} = 5\alpha\beta + 3 - 3\beta - 3\alpha$$

$$\frac{\partial UE_{J2}}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow 5\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{5}}$$

J_1 joga **A** com probabilidade de 3/5.

(3) Se ao invés deste jogo simultâneo, Ele e Ela jogassem um jogo sequencial em que Ela fosse a primeira a jogar, a solução do jogo seria **invariavelmente**: {*Shopping*, *Shopping*}. **F**



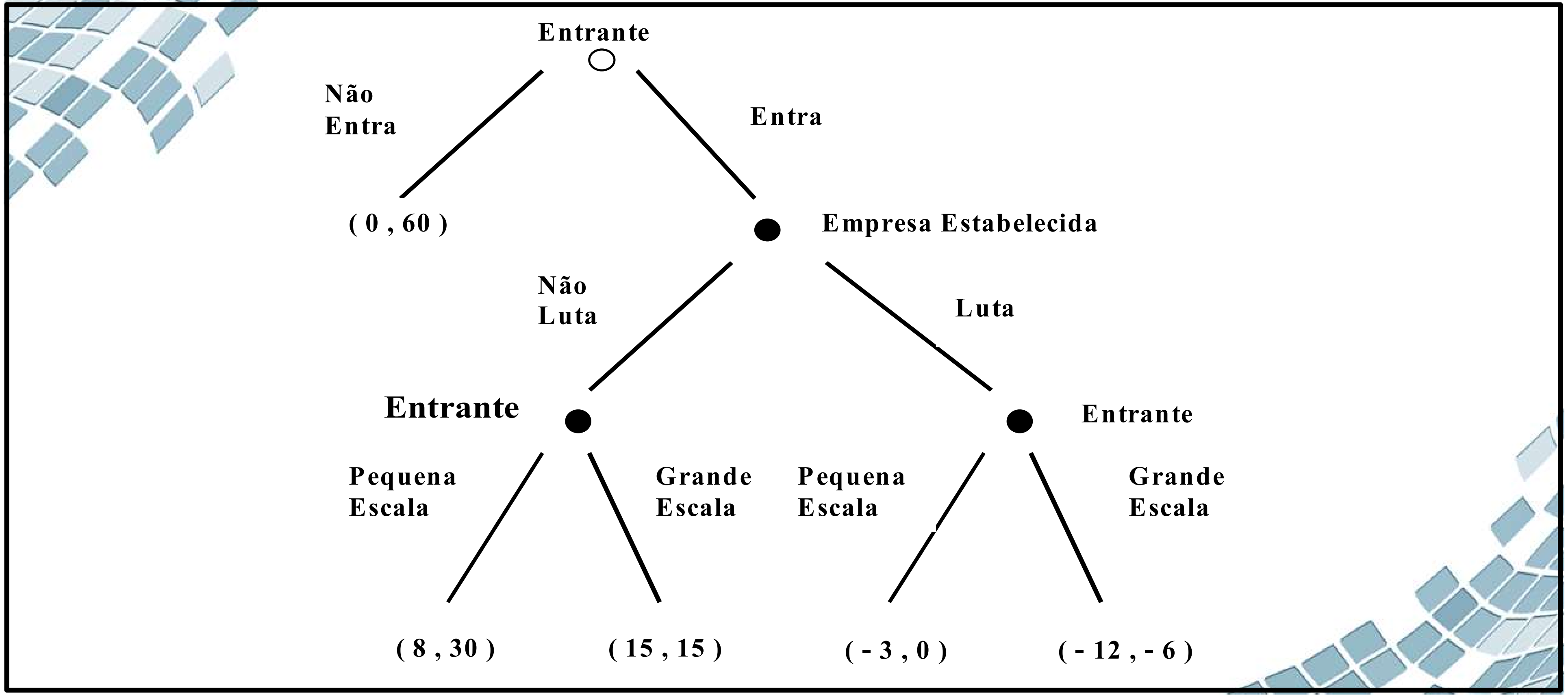
- Se Ela escolhe S ele escolhe S.
- Se Ela escolhe F ele escolhe F.
- Ela escolhe primeiro → Escolherá jogar S para que Ele jogue S.
  - ENPS = (3,2) = (S,S).

(4) Um equilíbrio de Nash pode envolver uma situação em que um dos jogadores, dadas as escolhas dos demais, encontraria incentivo para mudar sua escolha unilateralmente. ~~V~~ → **F**

- Como vimos os **Equilíbrios de Nash são** estáveis, não existindo incentivo para que qualquer agente econômico modifique sua escolha.
- Note que, no caso do nosso exercício, o jogo possui dois equilíbrios de Nash. Cada um deles é estável porque, uma vez escolhidas as estratégias, nenhum dos jogadores se desviará unilateralmente delas.
    - A questão é saber qual dos equilíbrios prevalecerá.

Questão 11 – 2006

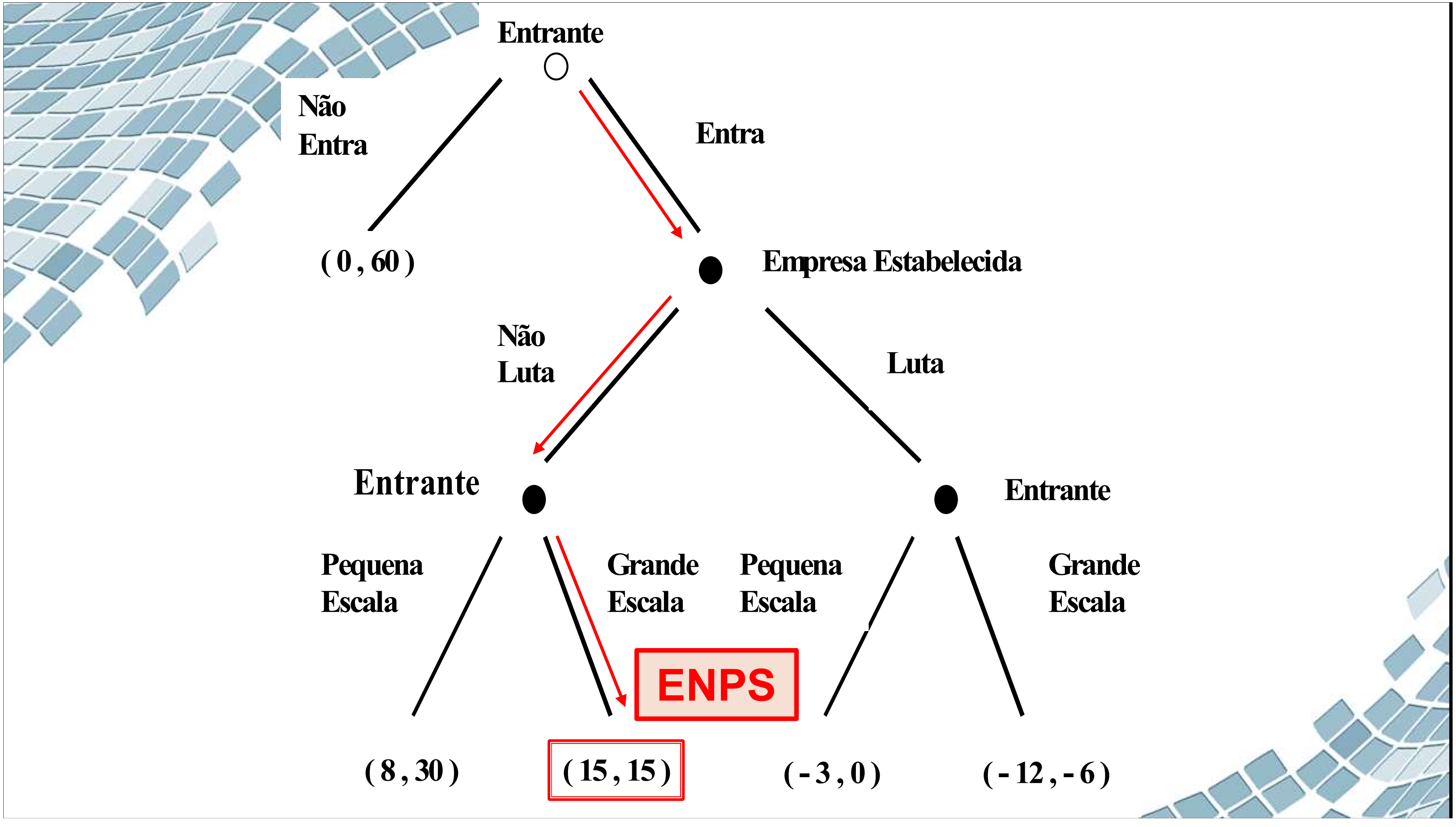
Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de teoria dos jogos:



- Vamos calcular os equilíbrios de Nash em estratégias puras.

		J2	
		NL	L
J1	EPP	8 , 30	-3 , 0
	EPG	8 , 30	-12 , -6
	EGP	15 , 15	-3 , 0
	EGG	15 , 15	-12 , -6
	NEPP	0 , 60	0 , 60
	NEPG	0 , 60	0 , 60
	NEGP	0 , 60	0 , 60
	NEGG	0 , 60	0 , 60

- E = Entra.
- NE = Não Entra.
- NL = Não Luta.
- L = Luta.
- P = Pequena Escala.
- G = Grande Escala.


Entrante
Não
Entra
Entra
(0 , 60)
Empresa Estabelecida
Não
Luta
Luta
Entrante
Entrante
Pequena
Escala
Grande
Escala
Pequena
Escala
Grande
Escala
ENPS
(8 , 30)
(15 , 15)
(- 3 , 0)
(- 12 , - 6)

(0) Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash. **V: São 6**

(1) Um equilíbrio perfeito em subjogos sempre implica que a combinação de estratégias selecionadas é ótima de Pareto. **F**

Como vimos, podemos ter um equilíbrio de Nash que não seja Pareto-Eficiente.

(2) O perfil de estratégias (Entra; Grande Escala, quando a empresa estabelecida não luta; Pequena Escala, quando a empresa estabelecida luta; Não luta) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos. **V**

Como vimos, trata-se do único ENPS.

(3) Se, antes do jogo ter início, a empresa estabelecida anunciasse sua disposição de adotar a estratégia de luta, a empresa entrante decidiria pela estratégia “não entrar”. **F**

A ameaça da Entrante de lutar não é crível. Observe que ao jogar “lutar”, o *payoff* dela será menor.

(4) A Empresa Estabelecida possui uma estratégia dominante no subjogo que tem início quando a Entrante decide entrar. **V**

- Observe que seu payoff será, sempre, maior caso ela escolha não lutar.
  - 30 > 0 e 15 > -6.