ANPEC - Microeconomia
Prova - 2013

Prof. Antonio Carlos Assumpção

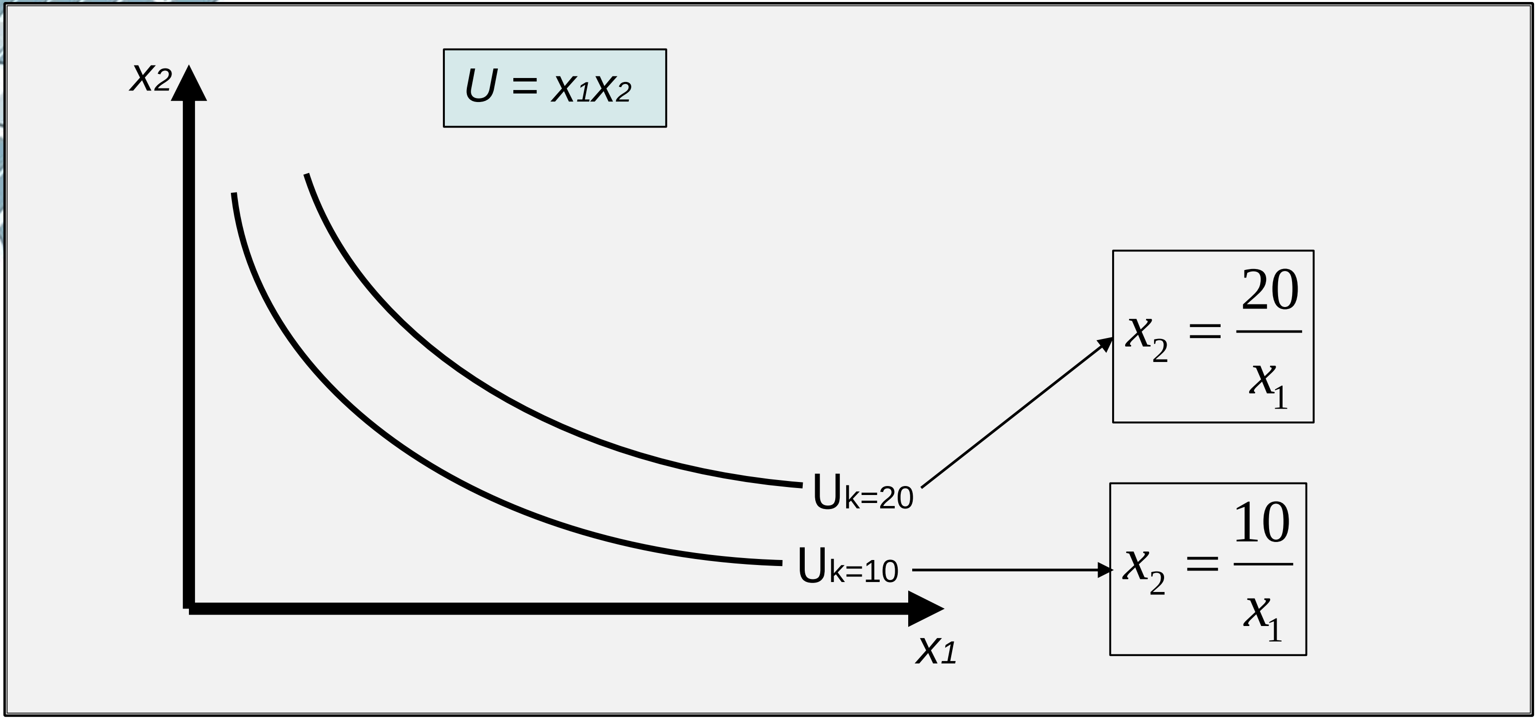
QUESTÃO 01

Considere a função utilidade $U = x_1x_2$. Assuma que o indivíduo recebe uma renda fixa d e que os preços dos dois bens são p_1 e p_2 .

Julgue as seguintes afirmativas:

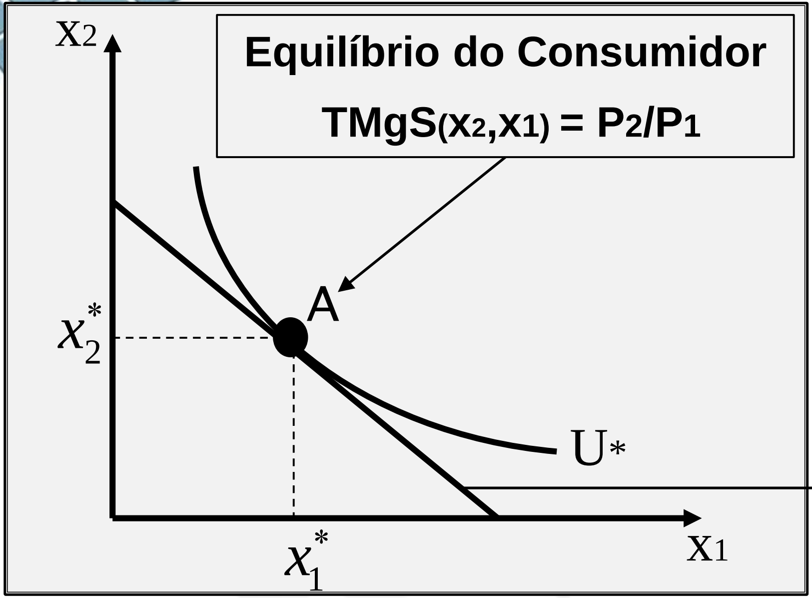
0) As curvas de nível dessa função utilidade têm o formato de hipérboles retangulares. V

- Uma curva de nível para essa função utilidade (nesse caso, as curvas de indiferença) são dadas por $x_1x_2 = k$, onde k é uma constante correspondente a um determinado nível de utilidade.
- Hipérboles retangulares são hipérboles cujas assíntotas são perpendiculares entre si.
  - Como as curvas de indiferença, nesse caso, tendem assintoticamente aos eixos, elas possuem essa propriedade.
- A forma geral de tais hipérboles retangulares, cujas assíntotas coincidem com os eixos cartesianos, é $x_2 = k/x_1$, o que coincide com a fórmula de nossas curvas de indiferença.


$U = x_1 x_2$
x_2
x_1
$U_{k=20}$
$U_{k=10}$
$x_2 = \frac{20}{x_1}$
$x_2 = \frac{10}{x_1}$

1) Para qualquer nível de preços dado a quantidade total gasta com x_1 é diferente da quantidade total despendida com x_2 . **F**

- No caso de uma função utilidade Cobb-Douglas o gasto do consumidor com cada um dos bens é constante e depende dos parâmetros α e β. Caso $\alpha = \beta$, o consumidor gastará o mesmo percentual de renda com cada um dos dois bens.



Relação de Preços (Inclinação da R.O.)

$$x_2 = \frac{d}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} x_1$$

$$R.O. \rightarrow d = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

- O consumidor maximizará a sua utilidade escolhendo a cesta de consumo que se encontra na curva de indiferença mais distante da origem respeitada a restrição orçamentária.
  - Isso ocorre quando a curva de indiferença tangencia a restrição orçamentátia (ponto A).
  - Nesse ponto, a inclinação da curva de indiferença, dada pela TMgS , é igual à inclinação da restrição orçamentária.

$Equação\ da\ Curva\ de\ Indiferença:$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0 \rightarrow$$

A variação da utilidade resultante de um acréscimo em x_1 deve ser igual a variação da utilidade resultante de um decréscimo em x_2, para que o consumidor permaneça na mesma curva de indiferença.

- Resolvendo para dx_2/dx_1 (a inclinação da curva de indiferença), temos:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{UMgx_1}{UMgx_2} = TMgS\left(x_2, x_1\right)$$

$$Como\ U = x_1^{\alpha}x_2^{\beta} \rightarrow TMgS\left(x_2, x_1\right) = -\frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

$$\boxed{Equilíbrio: \left(TMgS\left(x_2, x_1\right)\right) \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{P_1}{P_2} \left(Relação\ de\ preços\right) \Rightarrow P_2 x_2 = \frac{\beta}{\alpha} P_1 x_1}$$

$$Substituindo\ na\ R.O.I.$$

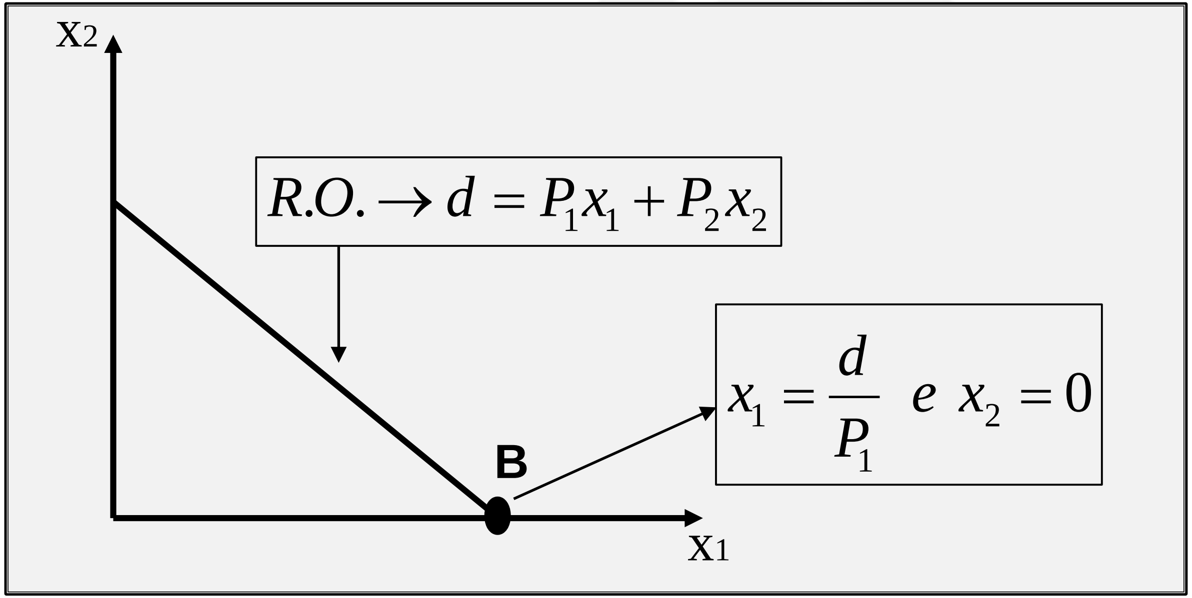
$$d = P_1 x_1 + P_2 x_2 \Rightarrow P_1 x_1 + \frac{\beta}{\alpha} P_1 x_1 = d \Rightarrow P_1 x_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = d \Rightarrow \frac{d}{P_1 x_1} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{d}{P_1 x_1} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \Rightarrow P_1 x_1 = \frac{d}{\frac{\alpha + \beta}{\alpha}} \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{\alpha}{\left(\alpha + \beta\right)} \frac{d}{P_1}} \quad e \quad \boxed{x_2^* = \frac{\beta}{\left(\alpha + \beta\right)} \frac{d}{P_2}}$$

- Logo, as participações dos bens no orçamento individual são constantes, dependendo apenas de α e β.
- Caso $\alpha = \beta$ (note que é precisamente o caso), o consumidor gastará o mesmo percentual da renda monetária com cada um dos dois bens.

2) A relação $p_2x_2 = p_1x_1$ mantém-se para todos os pontos da restrição orçamentária. **F**

- Isto ocorre somente nos pontos onde a utilidade é maximizada, dada esta função utilidade.
- Observe, por exemplo, que no caso da cesta B (sobre a restrição orçamentária), toda a renda é gasta com o bem x_1. Logo, o gasto com $x_2 = 0$.



3) Um aumento percentual na renda induz a um aumento percentual menor no consumo dos dois bens. **F**

- Como podemos ver através das funções de demanda dos dois bens, a demanda é diretamente proporcional à renda.
- Isso significa que qualquer aumento na renda do consumidor irá provocar um aumento na mesma proporção no consumo dos dois bens.
- Dito de outro modo, nesse caso (Cobb-Douglas), a elasticidade renda da demanda é unitária.

Demanda por x_1 → $$\boxed{x_1^* = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\frac{d}{P_1}}$$

$$E_d^{x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial d} \bullet \frac{d}{x_1} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{P_1} \bullet \frac{d}{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\frac{d}{P_1}} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{d}{P_1} \bullet \frac{(\alpha+\beta)P_1}{\alpha d} \Rightarrow \boxed{E_d^{x_1} = 1}$$

4) A função utilidade indireta derivada tem a seguinte forma:

$$V(p_1, p_2, d) = \frac{d^2}{4p_1 p_2}.$$ V

- Observe que, como, nesse caso $\alpha = \beta = 1$, as funções de demanda marshalianas são dadas por:

$$x_1^* = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \frac{d}{P_1} \rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{d}{2P_1}}$$

$$x_2^* = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \frac{d}{P_2} \rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{d}{2P_2}}$$

$$\boxed{Logo: V(P_1, P_2, d) = U\left(\frac{d}{2P_1} \frac{d}{2P_2}\right) = \frac{d^2}{4P_1P_2}}$$

QUESTÃO 02

Considerando que o axioma fraco da preferência revelada é atendido e que o comportamento do consumidor pode ser captado através de índices de Laspeyres e Paasche, definidos em relação a um período-base e um período t posterior, é correto afirmar que:

0) Se o índice de quantidade de Laspeyres for menor do que 1, o consumidor está melhor no período t do que no período-base. **F**

- Denotemos por q_i^0 a quantidade consumida do bem *i* no período base sendo *i* um índice que varia entre 1 e o número de bens existentes *n*. De modo similar, notemos por q_i^t a quantidade consumida do bem *i* no período corrente, por p_i^0 o preço desse bem no período base e por p_i^t o preço desse bem no período corrente. O índice Laspeyres de quantidade é dado por:

$$IL_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0} < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0 < \sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0$$

$$IL_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0} < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0 < \sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0$$

- Isso significa que a cesta de bens escolhida pelo consumidor no período *t* custaria para ele, no período base, menos do que a cesta de bens que ele efetivamente escolheu (no período base).
- Assim, a cesta de bens do período base foi revelada preferida à cesta de bens no período corrente, o que indica que o consumidor estava melhor no período base.

1) Se o índice de quantidade de Paasche foi maior do que 1, o consumidor melhorou no período t em relação ao período-base. V

$$IP_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^t} > 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t > \sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^t$$

- Isso indica que, no período corrente, o consumidor poderia adquirir a cesta de bens que consumiu no período base, mas preferiu consumir outra cesta.
- Assim, a cesta de bens consumida no período corrente foi revelada preferida à cesta de bens consumida no período base, o que indica que o consumidor está melhor no período corrente.

2) No índice de preços de Laspeyres utilizamos como pesos as quantidades do período-base. V

$$IL_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0}$$

3) Se o índice de preços de Paasche for menor do que 1, a teoria das preferências reveladas nos diz que o consumidor melhorou no período t em relação ao período-base. **F**

- Nada podemos dizer acerca da variação bem estar do consumidor com base exclusivamente em informações sobre o índice de preços.
- Para que se chegue a alguma conclusão sobre a variação no bem estar do consumidor, é necessário comparar o índice de preços com a razão entre a renda (ou gasto do consumidor) no período corrente e a mesma renda (ou gasto) no período base.
- Caso o índice Laspeyeres de preço seja inferior a essa razão, então podemos concluir que o consumidor está melhor no período corrente.
- Caso o índice Paasche seja superior a essa variação, podemos concluir que o consumidor estava melhor no período base.

4) Se o índice de preços de Paasche for maior do que a razão entre o gasto total do consumidor no período t e o gasto total no período-base, o consumidor estava melhor no período-base do que no período t. **V**

- Se o índice Paasche de preços é maior do que a razão entre o gasto no período corrente e o gasto no período base, devemos ter

$$IP_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0} > \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0 < \sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0$$

- Isso indica que, quando adquiriu a cesta de bens do período base o consumidor poderia adquirir a cesta de bens do período corrente a um custo menor.
- Assim, a cesta de bens do período base foi revelada preferida à cesta de bens do período corrente, o que indica que o consumidor estava melhor no período base.

QUESTÃO 03

Suponha que a função de produção para um dado produto tem a seguinte forma funcional: $q = f\left(x_1\right) = 2x_1 - 0,03x_1^2$. Considere também que o preço de uma unidade do bem final é $p(q) = R\$10,00$ e o preço unitário do insumo, praticado pelo mercado, é $p(x_1) = R\$8,00$.

Dadas essas informações, é correto afirmar que:

0) O nível de utilização do insumo que maximiza o nível de produção é $x_1 = 33{,}33$. V

- Tal problema consiste em escolher a quantidade do insumo x_1 que permite a maior produção possível.

- Portanto, o problema consiste em:

$$\max_{x_1}\left(2x_1 - 0{,}03x_1^2\right)$$

- A condição de primeira ordem é dada por:

$$\frac{dq}{dx_1} = 0 \rightarrow 2 - 0{,}06x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 33{,}33$$

- Note que isto significa que o produto será maximizado quando a PMgx_1 for igual a zero.

1) O nível de utilização do insumo que maximiza o lucro da firma é x_1 = 19,5. **F**

- Nesse caso, como queremos maximizar o lucro da firma, primeiramente, devemos escrever a função de lucro, onde o preço do bem é igual a $10 e o preço unitário do insumo é igual a $8.

$$\pi = RT - CT \rightarrow \pi = 10\left(2x_1 - 0,03x_1^2\right) - 8x_1$$

- Logo, o problema consiste em : $\max_{x_1}\left[10\left(2x_1 - 0,03x_1^2\right) - 8x_1\right]$

- A condição de primeira ordem é dada por:

$$\frac{d\pi}{dx_1} = 0 \rightarrow 20 - 0,6x_1 - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 20$$

- Logo, ao escolher x_1 = 20, a firma obterá o maior lucro possível.

2) O nível de produção economicamente ótimo é q = 28. **V**

- Como se trata de uma empresa tomadora de preço, o nível de produção que maximiza seu lucro é a produção eficiente.
- Esse nível de produção eficiente é obtido, como vimos no item anterior, quando a firma utiliza 20 unidades do insumo. Logo, temos:

$$q = 2x_1 - 0,03x_1^2 \rightarrow q_{(20)} = 2(20) - 0,03(20)^2 \rightarrow q_{(20)} = 28$$

3) O lucro máximo (π) obtenível pela firma é $\pi(q) = R\$120$. **V**

- Vimos que a firma obtém o maior lucro possível quando produz 28 unidades, utilizando 20 unidades do insumo x_1.
- O lucro de produzir 28 unidades é dado por:

$$\pi_{(28)}^{\max} = RT_{(28)} - CT_{(28)} \rightarrow \pi_{(28)}^{\max} = \underbrace{10(28)} - \underbrace{8(20)} \rightarrow \pi_{(28)}^{\max} = 120$$

Receita Total de Produzir 28 Unidades

Custo Total de produzir 28 Unidades, utilizando 20 unidades do insumo x_1.

4) A produtividade marginal do fator é crescente. **F**

$$PMg_{x_1} = \frac{dq}{dx_1} \rightarrow = 2 - 0,06x_1$$

$$\frac{dPMg_{x_1}}{dx_1} = -0,06 < 0$$

- Logo, a produtividade marginal do insumo x_1 é decrescente.

QUESTÃO 04

Uma firma monopolista atua num mercado no qual a demanda pelo produto pode ser dividida em dois mercados com características distintas, que podem ser resumidas pelo comportamento das respectivas demandas: $q_1^d = 24 - p_1$ e $q_2^d = 24 - 2p_2$. A tecnologia disponível para o monopolista apresenta custo marginal constante e igual a 6.

É possível afirmar que:

- Para avaliarmos os itens dessa questão precisamos calcular quanto o monopolista vai produzir, que preço ele vai cobrar, quanto vai vender em cada mercado, qual será o seu lucro e qual será o peso morto do monopólio em dois cenários:
  - no primeiro deles, o monopolista pratica o mesmo preço nos dois mercados e, no segundo, ele diferencia os preços entre os mercados.

Maximização de Lucros sem Discriminação de Preços

$Nesse\ caso: P_1 = P_2 = P.$

$Demanda\ Total \rightarrow Q = q_1^d + q_2^d \rightarrow (24 - P) + (24 - 2P)$

$$Q = 48 - 3P \rightarrow P = 16 - \frac{1}{3}Q$$

$$Máx.Lucro \Rightarrow RMg = CMg$$

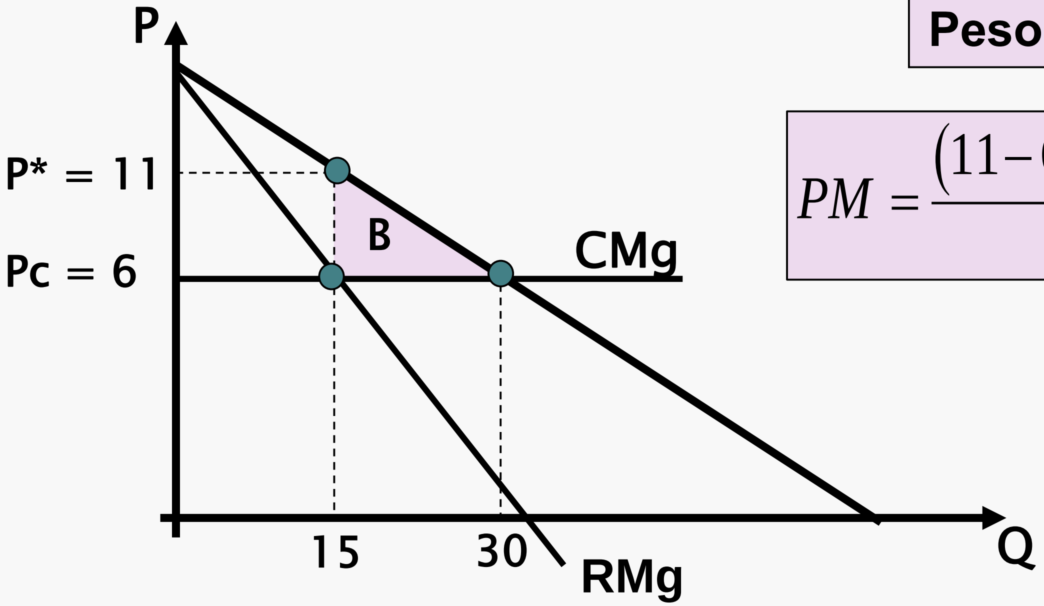
$$RT = PQ \rightarrow RT = \left(16 - \frac{1}{3}Q\right)Q \rightarrow RT = 16Q - \frac{1}{3}Q^2 \rightarrow RMg = 16 - \frac{2}{3}Q$$

$$Máx.Lucro \rightarrow 16 - \frac{2}{3}Q = 6 \rightarrow \boxed{Q^* = 15 \rightarrow P^* = 11}$$

$$\pi_{(15)}^{\max} = (11 \bullet 15) - (6 \bullet 15) \rightarrow \boxed{\pi_{(15)}^{\max} = 75}$$

$$Caso\ o\ Mercado\ Fosse\ Concorrencial \rightarrow P = CMg$$

$$16 - \frac{1}{3}Q = 6 \rightarrow \boxed{Q_C = 30 \rightarrow P_C = 6 = CMg} \rightarrow LT_e = 0$$



Peso Morto" = B

$$PM = \frac{(11-6)\bullet(30-15)}{2} = 37,5$$

Maximização de Lucros com Discriminação de Preços

$$q_1 = 24 - P_1 \rightarrow P_1 = 24 - q_1 \rightarrow RT_1 = 24q_1 - q_1^2 \rightarrow RMg_1 = 24 - 2q_1$$

$$q_2 = 24 - 2P_2 \rightarrow P_2 = 12 - \frac{1}{2}q_2 \rightarrow RT_2 = 12q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 \rightarrow RMg_2 = 12 - q_2$$

$$Max.Lucro_1 \rightarrow 24 - 2q_1 = 6 \rightarrow \boxed{q_1^* = 9 \rightarrow P_1^* = 15}$$

$$Max.Lucro_2 \rightarrow 12 - q_2 = 6 \rightarrow \boxed{q_2^* = 6 \rightarrow P_2^* = 9}$$

$$\pi_1^{\max} \rightarrow (15 \bullet 9) - (9 \bullet 6) = \boxed{81}$$

$$\pi_2^{\max} \rightarrow (9 \bullet 6) - (6 \bullet 6) = \boxed{18}$$

- Logo, discriminando preços nos dois mercados a firma conseguiria obter um lucro de $99.

- Caso esses dois mercados funcionassem em concorrência perfeita, teríamos:

$$P_1 = 24 - q_1 \rightarrow 24 - q_1 = 6 \rightarrow \boxed{q_1^c = 18 \rightarrow P_1^c = 6}$$

$$P_2 = 12 - \frac{1}{2}q_2 \rightarrow 12 - \frac{1}{2}q_2 = 6 \rightarrow \boxed{q_2^c = 12 \rightarrow P_2^c = 6}$$

- Procedendo da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos calcular o peso morto em cada um dos mercados:

$$\left.\begin{array}{l} PM_1 = \dfrac{(15-6)\bullet(18-9)}{2} = 40,5 \\ PM_2 = \dfrac{(9-6)\bullet(12-6)}{2} = 9 \end{array}\right\} \boxed{PM_1 + PM_2 = 49,5}$$

0) O monopolista cobrará o preço mais alto no mercado com a demanda mais elástica. **F**

- Na discriminação de preços de terceiro grau o monopolista cobra o preço mais elevado no mercado menos elástico.

$$\begin{aligned} &Mercado\ 1: \\ &q_1 = 24 - P_1 \rightarrow q_1^* = 9 \rightarrow P_1^* = 15 \\ &E_P^d = -1 \bullet \frac{15}{9} = |1,67| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Mercado\ 2: \\ &q_2 = 24 - 2P_2 \rightarrow q_2^* = 6 \rightarrow P_2^* = 9 \\ &E_P^d = -2 \bullet \frac{9}{6} = |3| \end{aligned}$$

- Como a elasticidade preço da demanda é menor no mercado 1, o preço praticado nesse mercado é maior.

1) Se realizar discriminação de preços, o monopolista obterá um lucro aproximadamente 24,2% maior do que se praticar um preço único para os dois mercados. **A**

- Provavelmente pelo fato da questão não disponibilizar o custo fixo do monopolista.
- Caso consideremos o custo fixo igual a zero, a afirmação será falsa.
- Como vimos, o lucro com discriminação de preços é igual a $99 e sem discriminação de preços é igual a $75.
  - Isso corresponde a um aumento de 32%

2) Com a discriminação de preços, a perda de eficiência no mercado 1, cuja demanda é caracterizada pela função $q_1^d = 24 - p_1$, será de 40,5. V

- Conforme calculamos, nesse caso o PM = 40,5.

3) Se o monopolista preferir praticar um preço único nos dois mercados, isso representará uma perda líquida de bem estar menor . V

- Conforme calculamos: $PM_{\text{sem discriminação}} = 37,5 < PM_{\text{com discriminação}} = 49,5$.

4) A produção total do monopolista ao realizar discriminação de preços seria de $q_{total} = 15$, bem maior do que a produção total sem discriminação. F

- Conforme calculamos, nos dois casos a produção é igual a 15.

QUESTÃO 05

Numa indústria competitiva, todas as empresas usam a mesma tecnologia dada pela função de produção $q = K^{1/6} L^{1/3}$. O insumo L é comercializado também num mercado competitivo ao preço de $p_L = R\$1{,}00$. Já o insumo K é mantido fixo no curto prazo e é comercializado ao preço de $p_K = 1/2$. A demanda de mercado para o produto final é $q_d = 400 - 100p$. Analise as afirmações abaixo:

0) O nível de K que minimiza o custo total de curto prazo é $K = q^2$. V

- O custo de produzir q unidades no curto prazo é dado por:

$$CT\left(\bar{K}, L\right) = \min_{L}\left(1L + \frac{1}{2}\bar{K}\right) \quad s.a.\ q = \bar{K}^{1/6} L^{1/3}$$

$$Como\ \ q = \bar{K}^{1/6} L^{1/3} \rightarrow L = \frac{q^3}{\bar{K}^{1/2}}$$

$$Logo:\ \ CT\left(\bar{K}, L\right) = \frac{q^3}{\bar{K}^{1/2}} + \frac{1}{2}K$$

$Assim,\ o\ nível\ de\ \bar{K}\ que\ minimiza\ o\ CT\ de\ curto\ prazo\ é\ dado\ por:$

$$\min_{\bar{K}} \frac{q^3}{\bar{K}^{1/2}} + \frac{1}{2}K$$

$C.P.O.$

$$\frac{\partial CT}{\partial \bar{K}} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} q^3 \bar{K}^{-3/2} \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \boxed{\bar{K} = q^2}$$

1) Supondo-se que as firmas incorrem num custo fixo igual a 1/6, a produção eficiente para as firmas nesse mercado é igual a *q* = 1/4. **F**

- O custo de produzir q unidades no curto prazo é dado por:

$$CT\left(\bar{K},L\right)=\min_{L}\left(1L+\frac{1}{2}\bar{K}\right)\quad s.a.\ q=\bar{K}^{1/6}L^{1/3}$$

- Como o enunciado informa que o custo fixo é igual a 1/6, temos que:

$$\frac{1}{2}\bar{K}=\frac{1}{6}\rightarrow\bar{K}=\frac{2}{6}\rightarrow\bar{K}=\frac{1}{3}$$

- Logo, o problema de otimização se resume a:

$$CT\left(L,\bar{K}_{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)=\min_{L}\left(L+\frac{1}{6}\right)\quad s.a.\ q=\left(\frac{1}{3}\right)^{1/6}L^{1/3}$$

$$Logo: CT = 3^{1/2} q^3 + \frac{1}{6} \rightarrow CMg = \frac{dCT}{dq} = 3 \bullet 3^{1/2} q^2 \rightarrow CMg = 3^{3/2} q^2$$

Dessa forma, a curva de oferta da firma competitiva (curva de CMg, a partir do min. do CVM) é dada por:

$$CMg = P = 3^{3/2} q^2 \rightarrow q^2 = \frac{P}{3^{3/2}} \rightarrow q_i^s = \frac{P^{1/2}}{3^{3/4}}$$

Como o preço dos fatores é dado, a curva de oferta de mercado no curto prazo é dada pelo somatório horizontal das curvas de oferta individuais.

$$q^s = \sum_{i=1}^{n} q_i^s = n \frac{P^{1/2}}{3^{3/4}}$$

Sendo assim, o equilíbrio de curto prazo é dado por:

$$q^d = q^s \Rightarrow 400 - 100P = n\frac{P^{1/2}}{3^{3/4}}$$

Note que o preço de equilíbrio depende do número de firmas, e não temos essa informação no enunciado:

2) O preço de equilíbrio de longo prazo da firma p = R\$1,00. ~~V~~ → F

- O custo de produzir q unidades no longo prazo é obtido da seguinte forma:

$$CT(K,L) = \min_{L}\left(1L + \frac{1}{2}K\right) \quad s.a.\ q = K^{1/6}L^{1/3}$$

- O equilíbrio minimizador de custos no longo prazo exige que:

$$\frac{P_L}{P_K} = TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{PMgL}{PMgK} \rightarrow \frac{1}{1/2} = \frac{1/3\, K^{1/6}L^{-2/3}}{1/6\, K^{-5/6}L^{1/3}} \rightarrow \frac{K}{L} = 1 \rightarrow K = L$$

- Substituindo na função de produção, temos:

$$q = L^{1/6}L^{1/3} \rightarrow q = L^{1/2} \rightarrow L = q^2$$

- Logo, temos:

$$CT_{LP} = \frac{3}{2}q^2 \rightarrow CMe_{LP} = \frac{CT_{LP}}{q} = \frac{3}{2}q \ e \ CMg_{LP} = \frac{dCT_{LP}}{dq} = 3q$$

- No longo prazo o equilíbrio ocorre no mínimo do CTMe (CTMe = CMg):

$$CMe_{LP} = \frac{3}{2}q = 3q = CMg_{LP} \rightarrow q = 0 \rightarrow P = 0$$

3) O nível de produção ótimo das firmas é q = 400. **F**

- Vimos que o equilíbrio de longo prazo ocorre quando *P = 0 e q = 0.*
- **OBS.** como $q_d = 400 - 100\,p$ (demanda de mercado), a produção de mercado será igual a 400, mas a produção de cada firma será igual a zero.

4) Dadas as características desse mercado, o número de firmas ótimo que ele comporta é n = 900. ~~V~~ → **F**

- Acabamos de ver que o mercado produzirá 400 unidades e que a produção da cada firma tende a zero. Isso só é possível caso $n \to \infty$.

QUESTÃO 06

Considere a teoria da produção e indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

0) Se a função de produção for $f(K,L)=\left[K^{a}+L^{a}\right]^{\frac{v}{a}}$, com $a \leq 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, ela apresenta retornos crescentes de escala. **V**

V > 1 → Retornos Crescentes de Escala

1) O coeficiente de elasticidade de substituição σ de uma função de produção como $f(K,L)=\left[K^{a}+L^{a}\right]^{\frac{v}{a}}$, com $a < 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, é $\sigma = 1/(1-a)$. **V**

2) Funções de produção com elasticidade de substituição $\sigma = 0$ possuem isoquantas em formato de L. **V : Complementos Perfeitos**

3) Se a tecnologia for monotônica, isso significa que não é possível produzir ao menos a mesma quantidade aumentando a quantidade de um dos insumos.

(F) Consumidor: Mais de um dos bens, maior utilidade.
Produção: Mais de um dos insumos, maior produção

4) Funções de produção do tipo Cobb-Douglas possuem elasticidade de substituição $\sigma = 1$. **V**

A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

- A elasticidade de substituição é uma medida que pode nos ajudar a descrever a oportunidade de substituição entre os fatores de produção.
- Ela nos mostra a variação percentual na relação capital/trabalho induzida por uma mudança de 1 ponto percentual na taxa marginal de substituição técnica, ao longo de uma isoquanta.
- Note que, conforme nos movemos ao longo da isoquanta, substituindo capital por trabalho, a relação K/L vai diminuindo, assim como a taxa marginal de substituição técnica (lembre-se que a TMgs é decrescente).

A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

- **Elasticidade de Substituição = σ**

$$\sigma = \frac{\text{Variação Percentual na relação capital–trabalho}}{\text{Variação Percentual na TMgS(K,L)}}$$

$$\sigma = \frac{\%\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\%\Delta TMg_S^T} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln TMg_S^T}$$

OBS. A derivada do logaritmo natural de uma variável nos fornece, aproximadamente, a variação percentual dessa variável. Logo, muitas vezes, é mais conveniente aplicarmos log, seja por esse motivo, seja pelo fato de que a aplicação de log nos permite linearizar a função.

A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

- De um modo geral a FDP ESC pode ser apresentada como:

$$Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \quad ,$$

$$com \quad A, a \quad e \quad b > 0, \quad \rho < 1 \quad e \quad \varepsilon > 0$$

- Em equilíbrio, devemos ter:

$$TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{w}{r} \longrightarrow$$

A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

- Relembrando:
- Eq. da isoquanta: $\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{PMgL}{PMgK}$

$$\boxed{Logo, \quad se \quad Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}}$$

$$TMgS_{(K,L)}^{T} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1} \bullet \rho bL^{\rho-1}}{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1} \bullet \rho aK^{\rho-1}} = \boxed{\frac{a}{b}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}}$$

A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

- Aplicando log, temos:

$$\ln TMgS^{T}_{(K,L)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\rho)\ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$(1-\rho)\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln TMgS^{T}_{(K,L)} - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\ln TMgS^{T}_{(K,L)} - \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

- Aplicando a definição de elasticidade de substituição:

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

$$\sigma = \frac{d\ln\left(\dfrac{K}{L}\right)}{d\ln TMg_S^T} = \frac{1}{1-\rho}$$

Logo:

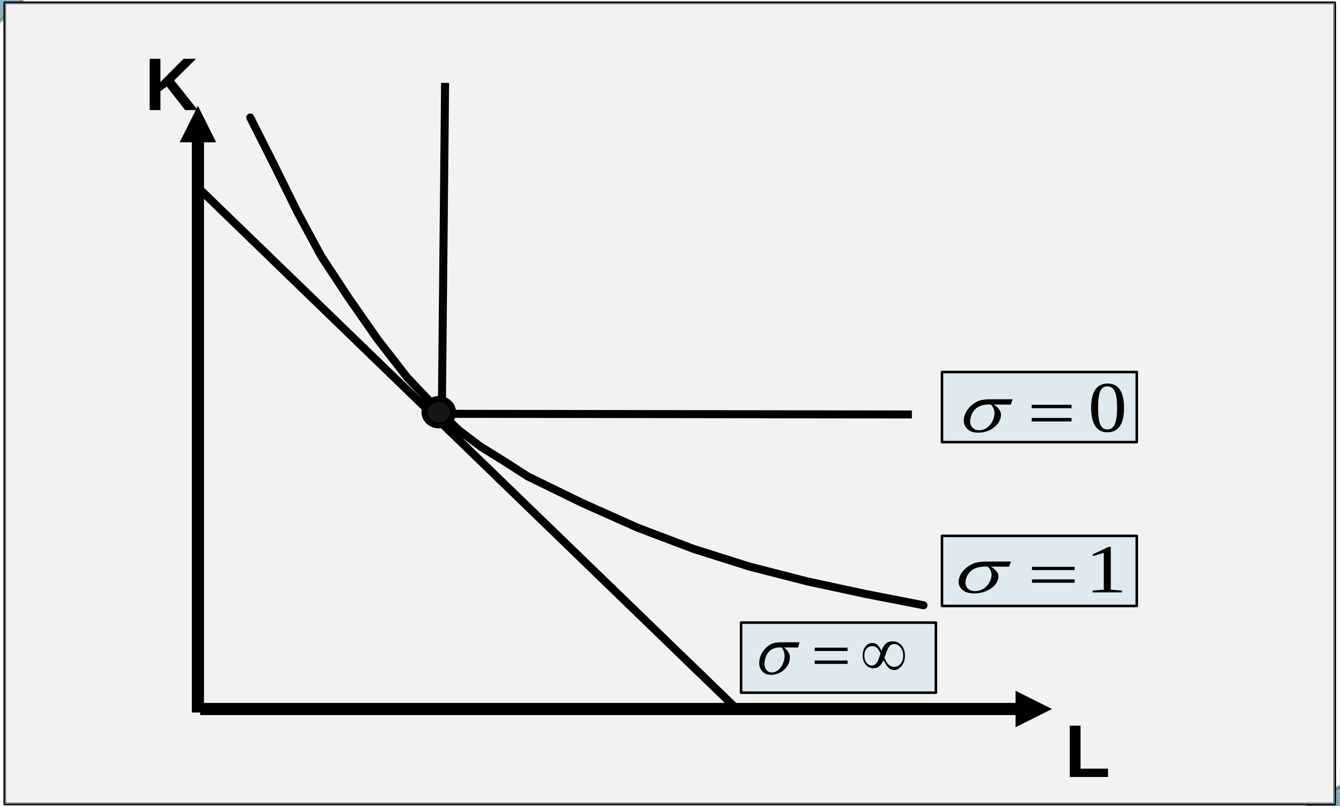
$$\begin{cases} \rho \to 0 \Rightarrow \sigma \to 1 \\ \rho \to 1 \Rightarrow \sigma \to \infty \\ \rho \to -\infty \Rightarrow \sigma \to 0 \end{cases}$$

$$Se \quad \sigma \to \infty \Rightarrow substitutos \;\; perfeitos$$

$$Se \quad \sigma \to 0 \Rightarrow complementares \;\; perfeitos$$

$$Se \quad \sigma = 1 \Rightarrow Cobb-Douglas$$

A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)



A Função de Produção ESC
(Elasticidade de Substituição Constante)

- **Elasticidade Escala = ε**

Multiplicando ambos os fatores de produção por uma constante positiva λ :

$$Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \left[(\lambda aK)^{\rho} + (\lambda bL)^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \left[\lambda^{\rho}\left(aK^{\rho} + bL^{\rho}\right)\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \lambda^{\rho\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)} Q \Rightarrow \boxed{\lambda^{\varepsilon} Q}$$

Logo $\begin{cases} \varepsilon = 1 \Rightarrow RCE \\ \varepsilon > 1 \Rightarrow RCrE \\ \varepsilon < 1 \Rightarrow RDE \end{cases}$

Assim, a existência de rendimentos constantes, crescentes ou decrescentes de escala depende de ε.

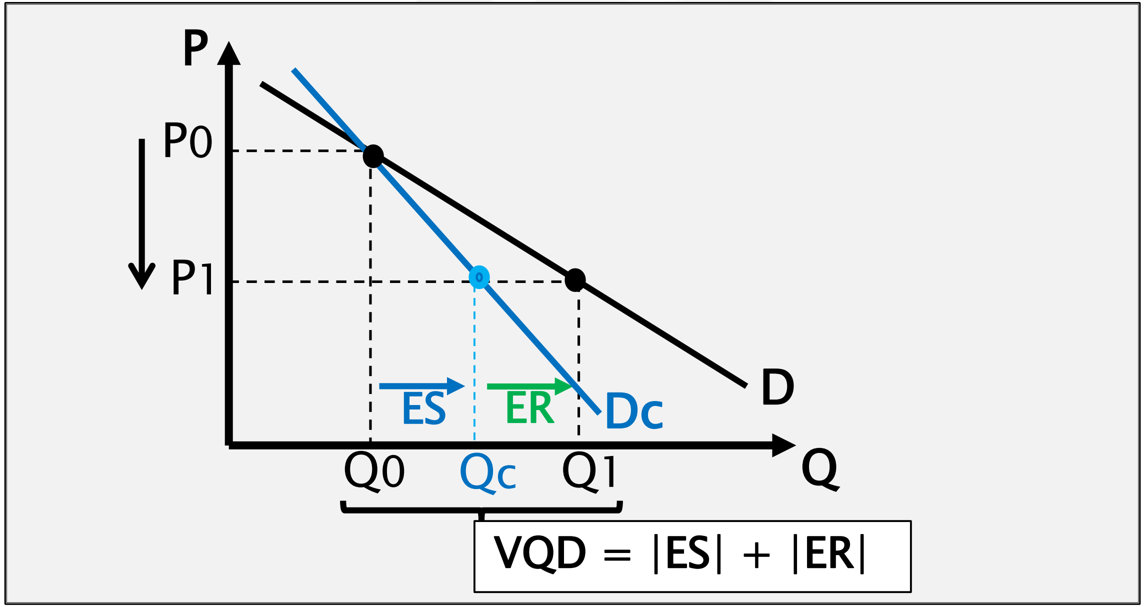
QUESTÃO 07

Em relação à curva de demanda compensada, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

- A queda no preço de um bem ou serviço tem dois efeitos: **Substituição e Renda**
  - **Efeito Substituição**
    - Os consumidores tenderão a demandar uma maior quantidade das mercadorias cujo preço foi reduzido e uma menor quantidade daquelas que agora se tornaram mais caras relativamente.
  - **Efeito Renda**
    - Os consumidores aproveitam o aumento de seu poder aquisitivo real: eles estarão em melhores condições, pois podem adquirir a mesma quantidade de mercadorias com um menor valor monetário, tendo assim, um excedente de renda para compras adicionais.

- No caso dos bens normais, o efeito renda positivo reforça o efeito substituição, sempre negativo (desde que os bens não sejam complementos perfeitos), ocasionando uma variação maior na quantidade demandada.

- A curva de demanda compensada, ou demanda Hicksiana, captura somente o efeito substituição; calcula a variação na quantidade demandada, após o consumidor ser compensado pela mudança em seu poder aquisitivo, decorrente da variação no preço de um bem.



0) Ela ilustra apenas efeitos substituição. V

- Ao longo da curva de demanda compensada, o nível de utilidade é mantido constante (compensação de Hicks). Isso significa que, para qualquer variação de preço, ela mostra a variação na quantidade demandada líquida do efeito renda, isto é, apenas o efeito substituição.

1) Sempre pode ser encontrada a partir da diferenciação da função de gasto total do consumidor em relação ao preço do bem. V

- O lema de Shepard afirma exatamente isso.

2) Ela difere da função de demanda Hicksiana porque esta última não mantém a utilidade constante. F

- Curva de demanda compensada é sinônimo de curva de demanda Hicksiana. Calcula a variação da quantidade demandada, após uma alteração no preço de um bem, mantida a utilidade constante.

3) Possui inclinação negativa. V

- A curva de demanda compensada jamais tem inclinação positiva.
- Desde que exista algum grau de substitutibilidade entre os bens, ela será negativamente inclinada, já que captura apenas o efeito.
- **OBS.** Ela será vertical, no caso de bens que sejam complementos perfeitos.

4) A ambiguidade que resulta dos efeitos renda e substituição atuarem em direções opostas nas curvas de demanda marshalianas não existe nas curvas de demanda compensadas. V

- Como não há efeito renda para um deslocamento sobre a curva de demanda compensada, só há o efeito substituição.
- Isso significa que, sobre a curva de demanda compensada, a variação na quantidade demandada não terá, jamais, o mesmo sinal que a variação no preço.

QUESTÃO 08

Duas firmas do setor industrial possuem a seguinte função de produção: $q = K^{1/4} L^{3/4}$, em que K representa a quantidade de capital utilizado e L a quantidade de trabalho empregado. Considere que a firma (2) é mais mecanizada do que a outra, de tal forma que $K_1 = 16$ e $K_2 = 625$, temos então $q_1 = 2L_1^{3/4}$ e $q_2 = 5L_2^{3/4}$. Por fim, suponha ainda que a oferta de trabalho disponível para as duas firmas é igual a 100 unidades. Nesse cenário, podemos constatar:

0) A alocação do fator trabalho implicaria $L_2 = 97{,}4$ e apenas 2,6 unidades de L na firma 1. **F (Parecido)**

- Temos um mercado dividido entre duas firmas, onde a firma 2 é mais mecanizada e, portanto, deve utilizar mais trabalhadores que a firma 1.
- Adicionalmente, temos uma oferta de trabalho igual a 100 ($L_1 + L_2 = 100$) e supomos que o salário pago pelas firmas deve ser o mesmo.
- Nesse caso podemos ter uma infinidade de alocações possíveis, pois qualquer alocação (L_1,L_2) tal que $L_1 + L_2 = 100$ é factível. Vamos resolver a questão supondo que a afirmação diz respeito à alocação eficiente.
- No curto prazo, temos que: $q_1 = 2L_1^{3/4} \;,\quad q_2 = 5L_2^{3/4} \quad e \quad L_1 + L_2 = 100.$

$$\boxed{PMgL_1 = \frac{\partial q_1}{\partial L_1} = \frac{6}{4}L_1^{-\frac{1}{4}}} \quad e \quad \boxed{PMgL_2 = \frac{\partial q_2}{\partial L_2} = \frac{15}{4}L_2^{-\frac{1}{4}}}$$

- Em equilíbrio devemos ter $PMgL_1 = PMgL_2 = w$, e sabemos que $L_2 = 100 - L_1$.

$$\frac{6}{4}L_1^{-\frac{1}{4}} = \frac{15}{4}\left(100 - L_1\right)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow \left(\frac{6}{15}\right)^{-4} L_1 = 100 - L_1 \rightarrow L_1 = \frac{100 - L_1}{39,06} \rightarrow$$

$$1,0256L_1 = 2,56 \rightarrow \boxed{L_1 = 2,4961} \rightarrow \boxed{L_2 = 97,5039}$$

1) Dado que a firma 1 possui menor nível de capital, a alocação eficiente de recursos deveria alocar mais trabalho na firma 1. **F**

- Como vimos no item anterior, a firma 1 contratará menos trabalhadores e isso se deve justamente ao fato de ela possuir um estoque de capital menor.

2) Dada a estrutura de capital das duas firmas, a alocação eficiente dos recursos levaria a um nível de produção *q* =179. **F**

- Como calculamos a alocação ótima de trabalhadores entre as firmas 1 e 2, podemos agora calcular a produção de cada firma e a produção total do setor industrial.

$$q_1 = 2L_1^{3/4} \rightarrow q_1 = 2(97,5039)^{3/4} \rightarrow \boxed{q_1 = 62,0578}$$

$$q_2 = 5L_2^{3/4} \rightarrow q_2 = 5(2,4961)^{3/4} \rightarrow \boxed{q_2 = 9,9293}$$

$$Logo: \boxed{Q = q_1 + q_2 = 71,9871}$$

3) Uma alocação igual de trabalho entre as duas firmas renderia um ganho de eficiência e produção. F

- Suponha então que cada firma utilize 50 unidades de trabalho. Com isso teremos:

$$q_1 = 2L_1^{3/4} \rightarrow q_1 = 2(50)^{3/4} \rightarrow \boxed{q_1 = 37,6060}$$

$$q_2 = 5L_2^{3/4} \rightarrow q_2 = 5(50)^{3/4} \rightarrow \boxed{q_2 = 94,0151}$$

$$Logo: \boxed{Q = q_1 + q_2 = 131,6211}$$

- Com isso, teremos um aumento na produção, mas não na eficiência.
  - As quantidades ótimas de trabalho (eficientes) foram calculadas no item (0).

4) Uma alocação de trabalho $L_1 = 50 = L_2$ levaria a uma produção total de q =131,6 unidades. V

QUESTÃO 09

Um pai deseja realizar uma divisão justa de uma pizza com 8 pedaços idênticos entre seus dois filhos. O filho mais novo (1) tem uma função utilidade por pizza definida por $U_1 = 2\sqrt{x_1}$, e o outro filho (2) tem uma função preferência por pizza levemente diferente, dada por $U_2 = \sqrt{x_2}$, em que *x* (*i* = 1,2) *i* representa quantidade de pedaços de pizza para o filho 1 e 2, respectivamente. Podemos sustentar que:

- **Funções de Bem Estar Social**
  - Descrevem os pesos específicos atribuídos à utilidade de cada indivíduo na determinação do que seja socialmente desejável.

- **Igualitária**
  - Todos os membros da sociedade recebem quantidades iguais de bens.
- **Rawlsiana**
  - Maximiza a utilidade da pessoa com o mais baixo nível de bem estar.
- **Utilitária**
  - Maximiza a utilidade total de todos os membros da sociedade.
- **Orientada Pelo Mercado**
  - O resultado de mercado é o mais equitativo.

0) Um pai utilitarista escolheria dividir a pizza da seguinte forma: $x_1 = 1{,}6$ e $x_2 = 6{,}4$. F

- Como vimos, a visão utilitária de bem estar consiste na maximização da utilidade total de todos os membros da sociedade.
- Logo, o pai utilitarista deveria escolher x_1 e x_2 de modo a maximizar a soma das utilidades, dado $x_1 + x_2 = 8$. Logo, o problema consiste em:

$$\max_{x_1, x_2}\left[2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right] \quad s.a.\ x_1 + x_2 = 8$$

$$x_1 + x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 8 - x_1 \rightarrow \max_{x_1, x_2}\left[2\sqrt{x_1} + \sqrt{8 - x_1}\right]$$

$$C.P.O. \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{2\sqrt{8 - x_1}} = 0 \rightarrow \sqrt{x_1} = 2\sqrt{8 - x_1} \rightarrow x_1 = 32 - 4x_1$$

$$\boxed{x_1 = 6{,}4 \rightarrow x_2 = 1{,}6}$$

1) Um pai que segue os critérios de justiça de John Rawls usaria uma espécie de “véu da ignorância”, no qual os filhos optariam por uma escolha de pedaços de pizza que maximizasse o valor esperado de suas utilidades. **~~V~~→F**

- Segundo vimos, para Rawls, “sob o véu da ignorância” os agentes escolheriam uma distribuição econômica que maximizasse o bem estar do menos favorecido.

- Portanto, a escolha Rawsiana deveria implicar em:

$$\boxed{W_{(U_1,U_1)} = min\left\{U_1, U_2\right\}}$$

- **Ver:** Varian, Hal. Microeconomia. 7ª ed., pág.662.

2) Um pai igualitário e benevolente distribuiria os pedaços de pizza de tal forma que cada filho obtivesse $x_1 = x_2$. ~~F~~ →V

- Se o pai é igualitário ele deseja proporcionar um consumo igual aos seus filhos. Logo, a afirmação seria verdadeira.

3) Uma alocação eficiente dos pedaços de pizza seria aquela que iguala a taxa marginal de substituição dos dois filhos. **V ?**

- Um outro item muito complicado. Não é possível falar em taxa marginal de substituição se a função de utilidade depende apenas do consumo de um bem: fatias de pizza.

4) Os dois filhos são avessos ao risco. V

- Como ambas as funções utilidades são côncavas, ambos são avessos ao risco.

QUESTÃO 10

Com relação ao mercado de fatores, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

0) A demanda de um setor por determinado insumo é a soma horizontal das demandas desse insumo por todas as empresas do setor. V

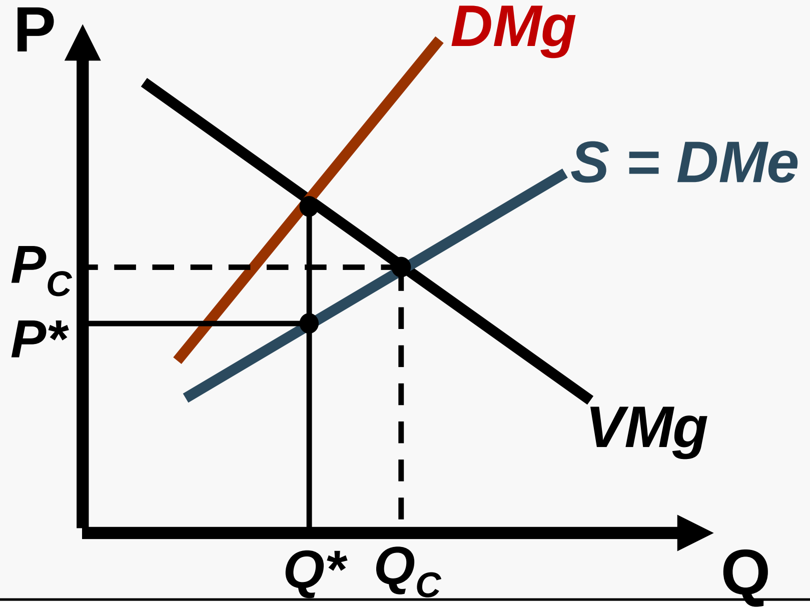
- A quantidade demandada de um insumo por parte das empresas de um setor nada mais é do que a soma das quantidades demandas pelas empresas individuais.
- Graficamente, isso significa que, para obter a curva de demanda pelo insumo do setor, basta fazer a soma horizontal das curvas de demanda individuais.

1) A curva de oferta de trabalho pode apresentar um trecho com inclinação negativa se o efeito-renda associado a uma remuneração mais elevada for maior que o efeito-substituição. V

- Uma elevação no salário aumenta o valor da dotação inicial do trabalhador.
- Se o lazer for um bem normal, esse aumento de valor tende a fazer com que o trabalhador queira consumir mais lazer e, portanto, ofertar menos trabalho. Esse efeito é conhecido como efeito renda dotação.
- Por outro lado, o aumento na remuneração do trabalho aumenta o custo de oportunidade do lazer, o que tende a fazer com que o agente tenda a substituir lazer por trabalho.
- Logo, o efeito do aumento do salário sobre a oferta de trabalho depende dos ER e ES. Caso |ER|>|ES| , teremos uma curva de oferta de trabalho negativamente inclinada.

2) Quando o comprador de um insumo tem poder de monopsônio, a curva de despesa marginal se situa abaixo da curva de despesa média. F

- Sendo ele o único comprador, um aumento da demanda por um isumo tende a elevar o preço da última unidade demandada (Despesa Marginal). Com isso, a despesa média também aumenta, mas DMg>Dme.



Monopsônio
DMg = VMg
DMg > DMe

3) Para um monopolista o produto da receita marginal será sempre menor do que o valor do produto marginal. **V**

- O produto da receita marginal de um insumo é dado por *RMg x PMg,* sendo que *RMg* é a receita marginal do monopolista e *PMg* é o produto marginal do insumo.
- Já o valor do produto marginal do insumo é *p x PMg* , em que *p* é o preço de demanda do produto.
- Como, para o monopolista, a receita marginal (igual ao CMg) é inferior ao preço de demanda:

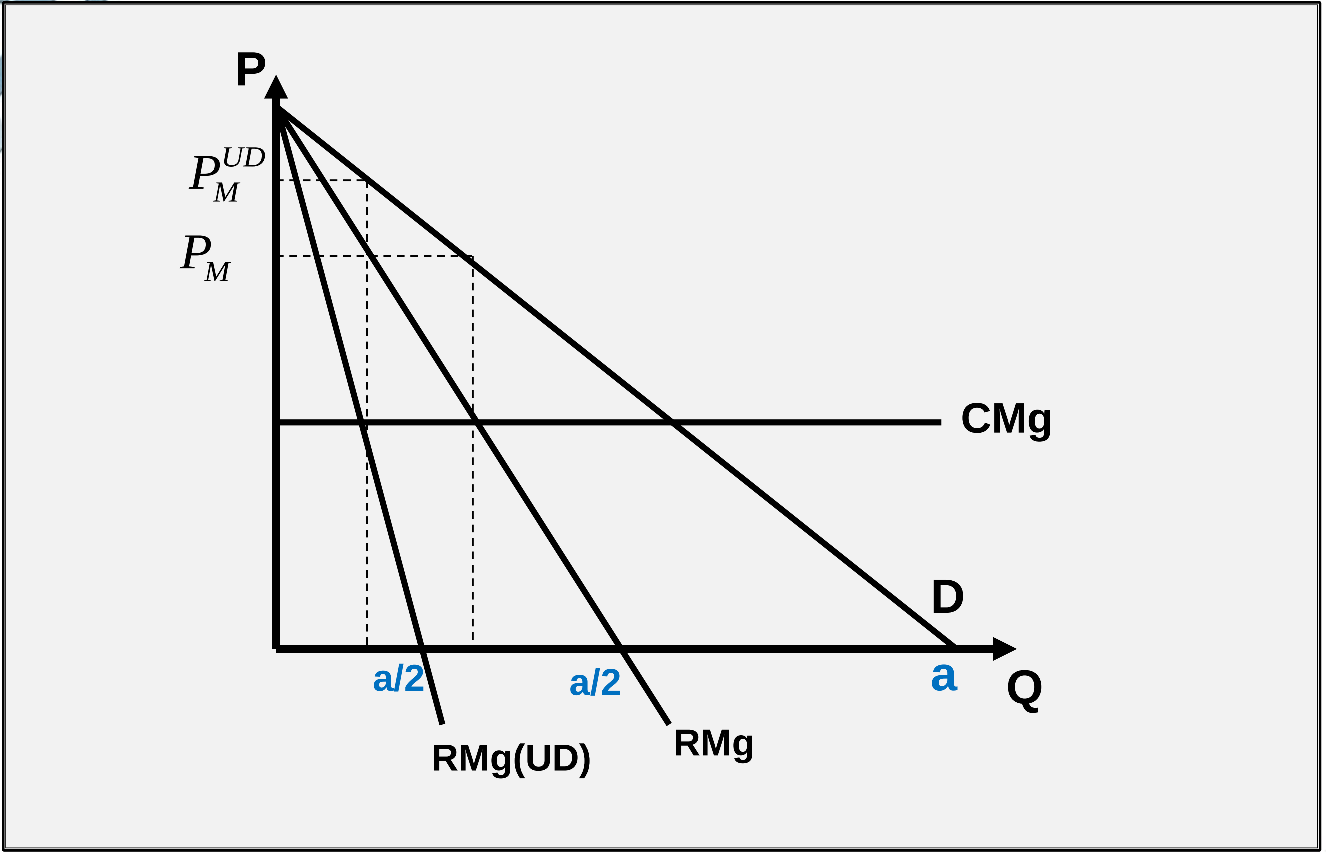
$$\left(RMg \bullet PMg\right) < \left(P \bullet PMg\right), \ \ pois \ \ P > RMg$$

4) Se um monopolista *upstream* vender um fator de produção para um monopolista *downstream*, o preço final do produto será afetado por um *mark-up* duplo. V

- O monopolista iguala RMg ao Cmg. Como RMg tem o mesmo intercepto e o dobro da inclinação da demanda, no caso de um monopolista comprando insumos de outro monopolista, teremos uma curva de RMg onde o intercepto é o mesmo e a inclinação é o quádruplo da inclinação da curva demanda, gerando um "*mark-up* duplo".

- Suponha que um monopolista tenha uma produção de ***x*** a um CMg constante, igual a **c**. Chamamos esse monopolista de ***monopolista upstream.***
- Ele vende o fator de produção ***x*** para outro monopolista, o ***monopolista downstream*** ao preço ***k***. Esse monopolista utiliza esse fator de produção para produzir e vender um determinado bem final, onde a curva de demanda é dada por: $Q = a - bP$. $\longrightarrow$

- A combinação de monopólio no mercado do bem final e mercado de insumos eleva o preço: “mark-up duplo”.



QUESTÃO 11

Considere o jogo abaixo e responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

Jogador 1	Jogador 2	
	x	y
a	$\boxed{30}$, 0	30, $\boxed{2}$
b	-20, 0	$\boxed{100}$, $\boxed{2}$

- Temos um único equilíbrio de Nash em estratégias puras {b,y}.
- O Jogador 2 possui uma estratégia dominante: jogar y.
- O Jogador 1 não possui uma estratégia dominante:
  - Ele joga **a** caso J2 jogue **X** e joga **b** caso J2 jogue **y**.
- <u>Nesse jogo</u>, todo equilíbrio de Nash é ótimo de Pareto.
  - Observe que não é possível, saindo de {b,y}, que um dos jogadores fique melhor sem que o outro fique pior.

0) As estratégias a e y são estritamente dominantes para os jogadores 1 e 2, respectivamente. F

1) A combinação de estratégias (b, y) é um Equilíbrio de Nash. V

2) Há múltiplos Equilíbrios de Nash. F

3) Todo Equilíbrio de Nash é um ótimo de Pareto. V

4) A combinação de estratégias (a, x) é um Equilíbrio de Nash não-estrito. F

QUESTÃO 12

Considere o jogo bimatriz abaixo:

	C	NC
C	(3,3)	(0,6)
NC	(6,0)	(1,1)

- Note que trata-se de um jogo do tipo “dilema dos prisioneiros”. Nesse caso, temos:
- Um único equilíbrio de Nash com estratégias puras, que não é ótimo de Pareto;
- Os dois agentes possuem uma estratégia dominante : Não Cooperar (NC).
- Se o jogo for repetido infinitas vezes, o equilíbrio {C,C} poderá ser alcançado.

- Realmente, temos um único equilíbrio de Nash em estratégias puras, que não é ótimo de Pareto {NC,NC}. Observe que ambos poderiam melhorar caso escolhessem {C,C}.
- Observe também que NC é uma estratégia dominante para ambos.

- Logo, a resposta dos itens 0 e 3 são automáticas:

0) O Equilíbrio de Nash único é cada jogador escolher (NC,NC) e obter um ganho de 1. V

3) A estratégia NC é estratégia dominante para os dois jogadores. V

- Quanto aos itens 1, 2 e 4, sobre jogos repetidos, vamos relembrar...

O Dilema dos Prisioneiros: Jogos Repetidos

- Vimos que, em um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado uma única vez os jogadores não são estimulados a cooperar entre si.
  - Note que, nesse caso, cooperar significa ambos negarem o crime.
- Entretanto, existem situações onde isso pode ser modificado.
- Basicamente, para convencer um jogador a cooperar, devemos convencê-lo de que ele será punido de forma suficientemente severa caso não coopere.

- **Essa punição pode ser realizada pelo outro jogador desde que o jogo se repita um número indeterminado de vezes.**
    - Dois ladrões esperam voltar a assaltar juntos, com a possibilidade de voltarem à prisão, então o jogador que coopera em uma repetição do jogo pode punir aquele que não cooperou, simplesmente não cooperando na próxima vez que eles forem presos.
    - Isto também pode explicar por que, por vezes, os cartéis possuem uma vida relativamente longa.
        - Não cooperar (burlar o cartel) pode induzir os outros agentes econômicos a se comportarem da mesma forma, reduzindo os lucros de todos.
    - Ou, porque é possível que pessoas interessadas na preservação de um recurso natural explorado conjuntamente colaborem na preservação desse recurso.

- **Esse resultado é limitado pelo número de jogadores.**
- Se o jogo envolver um número muito grande de jogadores o custo de fiscalização da ação de todos os jogadores se torna cada vez maior, isto é, se torna cada vez mais difícil identificar quem está e quem não está colaborando.
  - Ao mesmo tempo, a punição exige a coordenação de todos os agentes lesados, o que pode gerar diversas dificuldades.
  - Por esse motivo, não se verifica a formação de cartéis envolvendo um grande número de empresas e, pelo mesmo motivo, os recursos naturais livremente explorados por um grande número de agentes econômicos são os mais deteriorados.

- **Em um jogo repetido do dilema dos prisioneiros, o que torna plausível a cooperação ?**
  - Depende da crença dos jogadores a respeito das jogadas futuras.

- **Para um jogo repetido finitamente, não haverá cooperação:**
  - Suponha um jogo repetido 10 vezes. Qual o sentido de um dos jogadores não confessar, cooperando com o outro na décima rodada ? (não existe décima primeira).
    - No jogo repetido a adoção da estratégia de cooperação só faz sentido se isso induzir o outro a cooperar na rodada seguinte.
  - Mas se isso é verdade, por que cooperar na nona rodada, já que isso não induzirá cooperação na décima ? Mas se isso é verdade...
    - Logo, pelo princípio da indução retroativa, não haverá cooperação.

- **Com um número infinito de rodadas, não é possível estabelecer o resultado anterior.**
- Nesse caso, a estratégia ***tit-for-tat*** (*olho por olho*) obtém o melhor desempenho.
  - Essa estratégia consiste em cooperar enquanto o rival coopera e, caso ele deixe de cooperar, ele será punido na próxima rodada com a não cooperação.
- **A intuição:** embora a possibilidade de punição seja necessária para induzir a cooperação, punições mais prolongadas, embora induzam maior temor por parte do rival, tendem a gerar pior desempenho, na medida em que também geram prejuízo para quem as impõe.

- Se cooperar na rodada atual, você coopera na próxima.
    - Retaliação se não cooperar.
- Preocupação com ganhos futuros pode levar a um resultado eficiente de Pareto.

- **Algumas Possíveis Estratégias**
  - Estratégia ***tit-for-tat* (olho por olho)**: cooperar na primeira rodada. Nas outras rodadas repetir a estratégia do outro jogador na rodada anterior.
  - Estratégia ***trigger (gatilho)***: começar cooperando. Se o outro jogador deixar de cooperar em algum momento, nunca mais cooperar.

- **Em 1984*, Robert Axelrod**, um cientista político da Universidade de Michigan, pediu a diversos especialistas em teoria dos jogos que enviassem suas estratégias favoritas em um jogo do tipo dilema dos prisioneiros com repetição.

- Em um computador, ele simulou os resultados desse jogo confrontando todas as estratégias duas a duas. A estratégia com melhor performance foi a ***tit-for-tat***.

- **Axelrod, R. The Evolution of Cooperation. New York, Basic Books, 1984.**

1) Se o jogo for repetido infinitamente há um Equilíbrio de Nash perfeito em Subjogos que levaria cada jogador a obter o seu maior *payoff* médio. **V**

2) Se o jogo for repetido um número finito de vezes o resultado cooperativo pode ser alcançado e todos ganhariam um *payoff* de 3 em cada repetição. **F**

4) Suponha que os jogadores não saibam quando o jogo vai acabar e que os dois tenham uma crença comum de que a cada repetição do jogo a probabilidade de que ele vai continuar até N (N igual ao número de repetições) é de p = 2/3 . Nesse caso, o ganho de jogar sempre C é menor do que o ganho de desviar em N+1. **F**

- Se os jogadores não sabem quando o jogo termina e acham que a probabilidade de continuar é maior, sendo baixa a taxa de desconto (ou seja, eles pensam no futuro), eles vão jogar **C** → nesse caso, o ganho de longo prazo é maior do que o ganho de se desviar.

QUESTÃO 13

Seja um modelo de Cournot com 44 empresas, em que a função demanda do mercado seja dada por: $Q = 400 - 2q_i$ (sendo qi a produção de cada uma das 44 empresas). Seja o custo total de cada empresa expresso pela função $C_i = 40q_i$. Quanto cada empresa produzirá em equilíbrio? $\textbf{Resposta} = \mathbf{4}$

- No caso dessa questão, veremos que ela deveria ter sido anulada, pois não é possível obter o resultado que consta no gabarito com a função de demanda apresentada.
- Veremos que a resposta que consta no gabarito só é possível caso a função de demanda seja **$P = 400 - 2Q$**.

- **Modelo de Cournot**
  - Decisões de produção (Q) simultâneas.
  - O preço depende da quantidade ofertada por todas as firmas.
  - Cada firma considera fixo o nível de produção dos concorrentes e toma sua decisão de produção, sem a possibilidade de reação.
  - O equilíbrio obtido é o equilíbrio de Nash.

- No caso de um duopólio, devemos calcular as curvas de reação das duas firmas, que mostram como elas se comportam, dado o comportamento da rival, com o objetivo de maximização de lucros.
- Resolvendo o sistema, teremos as quantidades maximizadoras de lucro de ambas as firmas.
- No caso de mais de duas firmas (*n* firmas)...

- Seja **P = a – bQ** a curva de demanda de mercado e **CT = cQ** a função de custo total, idêntica para todas as firmas.

$$P = a - bQ \rightarrow RT = PQ \rightarrow RT = \left(a - bQ\right)Q \rightarrow RT = aQ - bQ^2$$

$$\boxed{RMg = \frac{dRT}{dQ} = a - 2bQ}$$

$$A \ demanda \ residual \ da \ firma \ 1 \ é \ dada \ por:$$

$$P = \left(a - bX\right) - bQ_1$$

onde X representa a produção combinada de todas as outras n-1 firmas.

$$Receita \ Marginal \ da \ Firma \ 1: \boxed{RMg_1 = \left(a - bX\right) - 2bQ_1}$$

Igualando a receita marginal ao custo marginal, obtemos a curva de reação da firma 1.

$$RMg_1 = CMg_1 \rightarrow \left(a - bX\right) - 2bQ_1 = c \rightarrow 2bQ_1 = a - c - bX$$

$$Q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}X$$

Como o equilíbrio é simétrico, cada firma produzirá a mesma quantidade, e os n-1 concorrentes da firma 1 produzirão (n-1) vezes a produção de equilíbrio da firma 1.

Logo, a produção de equilíbrio de cada firma (Q*) será dada por:

$$Q^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{X}{2} \rightarrow Q^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{\left(n-1\right)}{2}Q^*$$

$$\boxed{Q^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{(n-1)}{2} Q^*}$$

$$Q^* + \frac{(n-1)}{2} Q^* = \frac{a-c}{2b} \rightarrow \left[1 + \frac{(n-1)}{2}\right] Q^* = \frac{a-c}{2b}$$

$$Q^* = \frac{\frac{a-c}{2b}}{\frac{2+(n-1)}{2}} \rightarrow Q^* = \frac{\frac{a-c}{b}}{2+(n-1)} \rightarrow Q^* = \frac{\frac{a-c}{b}}{2+n-1} \rightarrow$$

$$\boxed{Q^* = \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{a-c}{b}} \longrightarrow \boxed{Q^* = \left(\frac{1}{44+1}\right) \frac{400-40}{2} = 4}$$

QUESTÃO 14

Considere um cartel entre duas empresas. Diz-se que uma empresa coopera com o cartel quando restringe sua produção para aumentar os lucros do cartel, e diz-se que uma empresa não coopera quando ela mantém sua produção ao nível determinado pela solução de Cournot, ainda que a outra empresa coopere e restrinja a sua produção. Suponha que o lucro de uma delas quando não coopera e a outra empresa coopera é de $ 1.600, que o lucro da empresa quando ambas cooperam com o cartel é de $ 1.400, e que o lucro de cada uma das empresas se ambas não cooperarem é de $ 1.200. Expresse em percentual o valor mínimo do fator de desconto para promover o sucesso do cartel, se ambas as empresas adotarem a estratégia gatilho.

Jogos Repetidos (Observações)

- Um fator que influencia significativamente a decisão de cooperação em um jogo repetido é o grau de impaciência dos jogadores, em termos da taxa pela qual eles descontam os ganhos futuros.

- **Suponha duas firmas atuando em um certo mercado: hipóteses.**
  - **Cooperação**, mantendo um preço alto → Lucro do cartel = cinco milhões para cada firma.
  - **Competição** entre elas → Lucro de um milhão para cada firma.
  - **Traição** ao conluio → Lucro adicional de dez milhões para quem descumprir o acordo e um lucro nulo para quem manteve o preço baixo.
  - As firmas adotam a estratégia ***trigger (gatilho)*** ou seja, cooperam enquanto a rival cooperar e, no caso de traição, ela é punida para sempre com a não cooperação.
  - As firmas descontam os valores futuro à taxa δ.

- **Em qualquer momento do tempo, as alternativas das firmas são:**

- **Manter o acordo:** fluxo de lucros de \$5 milhões indefinidamente, descontados à taxa δ , que resulta no seguinte valor presente:

$$VP = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \ldots = \frac{5}{1-\delta}$$

- Trair o acordo resulta em um ganho extraordinário de 10 milhões no presente, mas tal ganho seria seguido de ganhos equivalentes a 1 milhão para sempre, gerando um valor presente equivalente a:

$$VP = 10 + 1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + \ldots = 10 + \frac{1}{1-\delta}$$

- Veremos que as firmas serão indiferentes a essas estratégias quando esses dois valores forem equivalentes, o que resulta em uma taxa de desconto de 0,6.

$$\frac{5}{1-\delta} = 10 + \frac{1}{1-\delta} \rightarrow \frac{5}{1-\delta} - \frac{1}{1-\delta} = 10 \rightarrow \frac{4}{1-\delta} = 10$$

$$10 - 10\delta = 4 \rightarrow 10\delta = 6 \rightarrow \boxed{\delta = 0,6}$$

- Quanto maior for a taxa de desconto, mais impaciente será a firma (maior valorização do resultado presente) e, com isso, mais instável será o cartel, dada a maior ocorrência de não cooperação entre seus membros.

Observações Sobre o Fator de Desconto (δ)

- O jogador valoriza o recebimento de \$1 hoje (período t) mais do que o recebimento de \$1 no período t+1.

- Representamos isso considerando um **fator de desconto** δ, tal que $\mathbf{0 \leq \delta < 1}$, que deve ser aplicado às recompensas ao longo do tempo.

- O fator de desconto está associado a uma **taxa de desconto** (taxa de juros) que denotaremos por $\boldsymbol{r}$, da seguinte forma: $\delta = \left(1/1+\boldsymbol{r}\right)$.

- Por exemplo, se a taxa de juros for igual a 5% o fator de desconto será igual a (1/1,05) = 0,9524.

- Dessa forma, \$100 em t+1 equivalem a \$95,24 hoje (\$100 x 0,9524).

- Caso as recompensas infinitas de um jogador sejam iguais a \$100, teremos:

$$VP = 100 + 100\delta + 100\delta^2 + 100\delta^3 + \ldots$$

$$Logo: VP = 100\left(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots\right)$$

- Note que trata-se de uma P.G. infinita de razão positiva (δ) inferior à unidade, cuja solução é dada pelo 1º termo dividido por um menos a razão. Logo:

$$VP = 100 + 100\delta + 100\delta^2 + 100\delta^3 + \ldots \to \boxed{\frac{100}{1-\delta} = 100\left(\frac{1}{1-\delta}\right)}$$

- Observe então que:

$$1)\ VP = 5+5\delta+5\delta^2+5\delta^3+\ldots = \boxed{\frac{5}{1-\delta} = 5\left(\frac{1}{1-\delta}\right)}$$

$$2)\ VP = 10+\overbrace{1+1\delta+1\delta^2+1\delta^3+\ldots} = \boxed{10+\left(\frac{1}{1-\delta}\right)}$$

$$3)\ VP = 10+2\delta+2\delta^2+2\delta^3+\ldots = 10+\left(\frac{2\delta}{1-\delta}\right) = \boxed{10+2\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)}$$

Note que, nesse caso, o primeiro termo da progressão é 2δ.

- No caso do presente exercício, caso a empresa coopere com o cartel sempre, seu lucro será dado por:

$$VP = 1400 + 1400\delta + 1400\delta^2 + \ldots = 1400\left(\frac{1}{1-\delta}\right)$$

- Caso a empresa não coopere com o cartel, acionando a estratégia de gatilho, na qual ambas as empresas não vão cooperar (solução de Cournot), seu lucro será dado por:

$$VP = 1600 + 1200\delta + 1200\delta^2 + \ldots = 1600 + 1200\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)$$

- Para que haja sucesso na manutenção do cartel, o lucro de se desviar deve ser inferior ao lucro obtido com a manutenção do cartel.

- Devemos calcular a taxa de desconto que torna isso possível. Portanto:

$$\boxed{1400\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\geq 1600+1200\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)}$$

$$1400\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\geq 400+1200\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\rightarrow \frac{200}{1-\delta}\geq 400\rightarrow 200\geq 400-400\delta$$

$$400\delta\geq 200\rightarrow \delta\geq 0,5\left(50\%\right)$$

- Logo, o valor mínimo do fator de desconto que garante estabilidade do cartel é 50%. Portanto a resposta que deve ser marcada no gabarito é 50.

QUESTÃO 15

Considere um mundo com duas mercadorias, no qual as preferências dos consumidores podem ser expressas pela equação $U(X_1, X_2) = (10X_1)^{1/2} + X_2$, em que (X_1, X_2) , representa a quantidade consumida das duas mercadorias. Sabendo que os preços das mercadorias são, respectivamente, $P(X_1) = 2{,}5$ e $P(X_2) = 8$, diga qual o impacto sobre o bem estar de uma elevação do preço da mercadoria X_1 para $P(X_1) = 5$.

- Trata-se de um problema de teoria do consumidor que possui preferências quase-lineares em X_2.
- Nesse caso, a demanda por X_1 não depende da renda monetária do consumidor, mas somente dos preços relativos.
- Por conta disso, o impacto sobre o bem estar pode ser igualmente mensurado através da variação do excedente do consumidor, da variação compensatória ou da variação equivalente.
  - Para maiores detalhes sobre esse ponto, veja a questão 2 da prova de 2008.
- Para calcularmos a variação do excedente do consumidor após a variação no preço do bem X_1, precisamos da curva de demanda marshaliana pelo bem X_1.

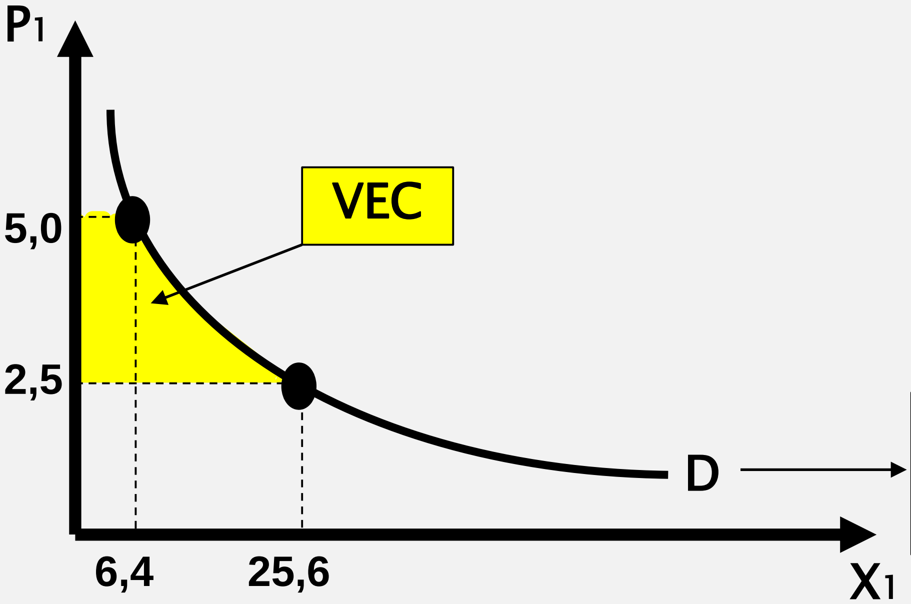
$$Equilíbrio \rightarrow TMgS_{(X_2,X_1)} = -\frac{UMgX_1}{UMgX_2} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X_1}}{\frac{\partial U}{\partial X_2}} = -\frac{P_1}{P_2}$$

$$U(X_1, X_2) = (10X_1)^{1/2} + X_2$$

$$TMgS_{(X_2,X_1)} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X_1}}{\frac{\partial U}{\partial X_2}} = -\frac{\frac{1}{2}10^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}}}{1}$$

$$Equilíbrio \rightarrow \frac{1}{2}10^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}} = \frac{P_1}{8} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{X_1}} = \frac{P_1}{8 \bullet \frac{1}{2}10^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \sqrt{X_1} = \frac{4 \bullet 10^{\frac{1}{2}}}{P_1}$$

$$X_1 = \frac{4^2 \bullet 10}{P_1^2} \rightarrow X_1^* = \frac{160}{P_1^2} \longrightarrow \begin{cases} P_1 = 2,5 \rightarrow X_1 = 25,60 \\ P_1 = 5,0 \rightarrow X_1 = 6,4 \end{cases}$$



$$X_1^* = \frac{160}{P_1^2}$$

$$VEC = \int_{2,5}^{5} \frac{160}{P_1^2} dP_1 = -\left[\frac{160}{P_1}\right]_{2,5}^{5} = \left[-\frac{160}{5}\right] - \left[-\frac{160}{2,5}\right] = 32$$