Microeconomia

Teoria da Produção

Prof.: Antonio Carlos Assumpção

Tópicos Discutidos

- A Tecnologia de Produção
- Isoquantas
- Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)
- Produção com Dois Insumos Variáveis
- Rendimentos de Escala

Introdução

- Nesta parte e na próxima (custos de produção) examinaremos a teoria da empresa sob a ótica da oferta:
  - Como a empresa toma a decisões de produção com base na minimização dos custos
  - Como os custos variam com o volume de produção
  - Características da oferta de mercado

Introdução

- Em economia a noção de prazo independe do tempo, portanto, definimos:
  - **Curto Prazo**
    - Período de tempo em que pelo menos um fator de produção é fixo;
  - **Longo Prazo**
    - Período de tempo necessário para que todos os fatores de produção tornem-se variáveis.

Introdução

- Firma
  - Unidade técnica que produz bens ou serviços.
- Fator de Produção
  - São os bens e serviços transformáveis em produção, ou seja, os insumos, como mão-de-obra, materiais e Capital.
- Processo de Produção
  - Técnica ou tecnologia por meio da qual um ou mais produtos serão obtidos a partir da utilização de determinadas quantidades de fatores de produção.

A Tecnologia da Produção

- **Função de Produção:**
  - Nos mostra a quantidade máxima de produto que pode ser obtida através da utilização de certas quantidades de fatores de produção. Dito de outra forma, escolhido um processo de produção, a função de produção serve para quantificá-lo.
  - Nos mostra o que é *tecnicalmente viável* quando a empresa opera *eficientemente*.

A Tecnologia da Produção

- **Portanto, a função de produção pode ser representada pela equação abaixo, onde acima de cada variável temos o sinal da respectiva derivada.**

$$Q = \overset{(+)}{A}\; f\left(\overset{(+)}{K}, \overset{(+)}{L}\right)$$

Mão-de-obra

Estoque de Capital

Tecnologia

Produto por unidade de tempo

A Tecnologia da Produção

- Podemos considerar a tecnologia exógena no curto prazo, de forma que:

$$\boxed{Q = f\left(\overset{(+)}{K}, \overset{(+)}{L}\right)}$$

Q = Produto, K = Capital, *L* = Mão-de-obra

- Para uma dada tecnologia

Produção com Dois Insumos Variáveis

- **Isoquantas**
  - A curva demonstra todas as possíveis combinações de insumos que geram o mesmo volume de produção

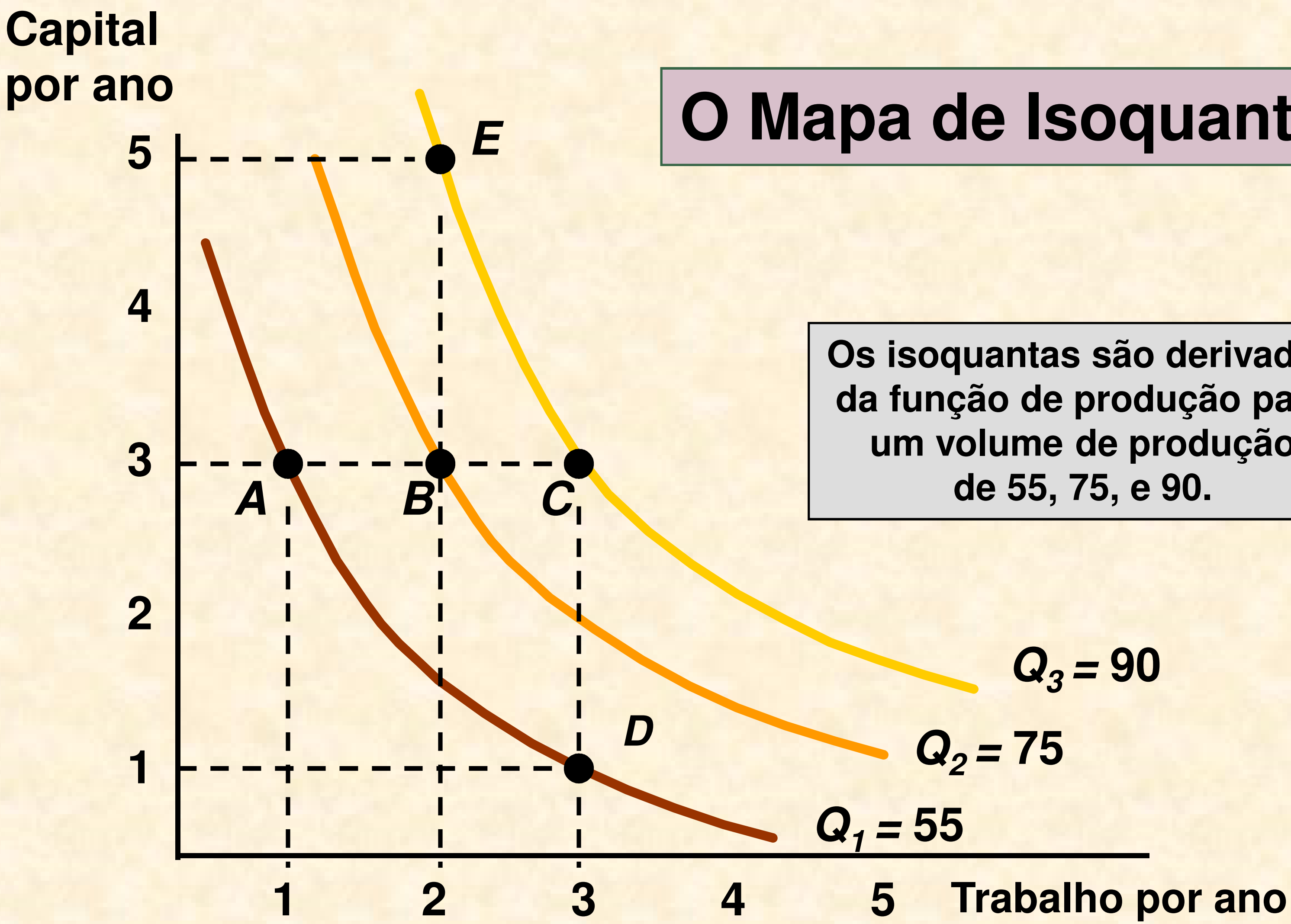
Produção com Dois Insumos Variáveis

- Assumindo que:
  - A Produção de alimentos é gerada com dois insumos, K e L :
    - Para qualquer nível de K, o volume de produção aumenta com mais L.
    - Para qualquer nível de L , o volume de produção aumenta com mais K.
    - Várias combinações de insumos geram o mesmo volume de produção.

Produção com Dois Insumos Variáveis

	Trabalho				
Capital	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	40	55	65	75
2	40	60	75	85	90
3	55	75	90	100	105
4	65	85	100	110	115
5	75	90	105	115	120

Produção com Dois Insumos Variáveis



O Mapa de Isoquantas

Os isoquantas são derivados da função de produção para um volume de produção de 55, 75, e 90.

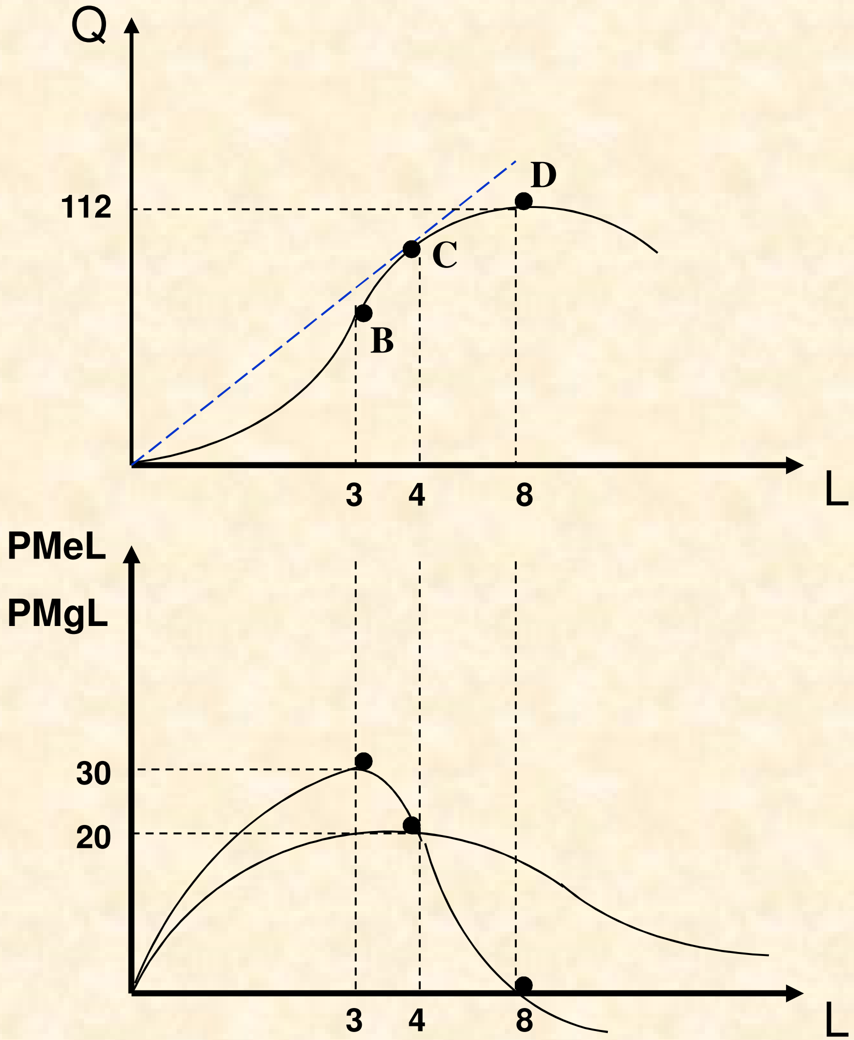
Flexibilidade do Insumo

- O isoquantas enfatizam como diferentes combinações de insumos podem ser utilizados para gerar o mesmo volume de produção.
- Essa informação permite ao produtor responder eficientemente às variações nos preços dos insumos.

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

Quantidade de Trabalho (*L*)	Quantidade de Capital (*K*)	Produto Total (*Q*)	Produto Medio	Produto Marginal
0	10	0	---	---
1	10	10	10	10
2	10	30	15	20
3	10	60	20	30
4	10	80	20	20
5	10	95	19	15
6	10	108	18	13
7	10	112	16	4
8	10	112	14	0
9	10	108	12	-4
10	10	100	10	-8

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)



- Observações:
  - 1) Com trabalhadores adicionais, produto (*Q*) aumenta, atingindo um máximo e então diminui.
  - 2) O produto médio do trabalho (*PMeL*), ou produto por trabalhador, aumenta e então diminui.

$$PMeL = \frac{Produto}{Insumo\ Trabalho} = \frac{Q}{L}$$

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

- Observações:
  - 3) O produto marginal do trabalho (PMgL), ou produto do trabalhador adicional, inicialmente aumenta rapidamente e, então, diminui e fica negativo.

$$PMgL = \frac{\Delta Produto}{\Delta Insumo\ Trabalho} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

- Isto ocorre devido a *lei dos rendimentos marginais decrescentes*
  - Mantendo-se a tecnologia e todos os insumos, exceto um deles, constantes, conforme são adicionados incrementos iguais do insumo variável, a taxa resultante de aumento do produto irá diminuir, a partir de certo ponto. Dito de outro modo, depois de um certo ponto, o produto físico marginal do insumo variável irá diminuir.

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

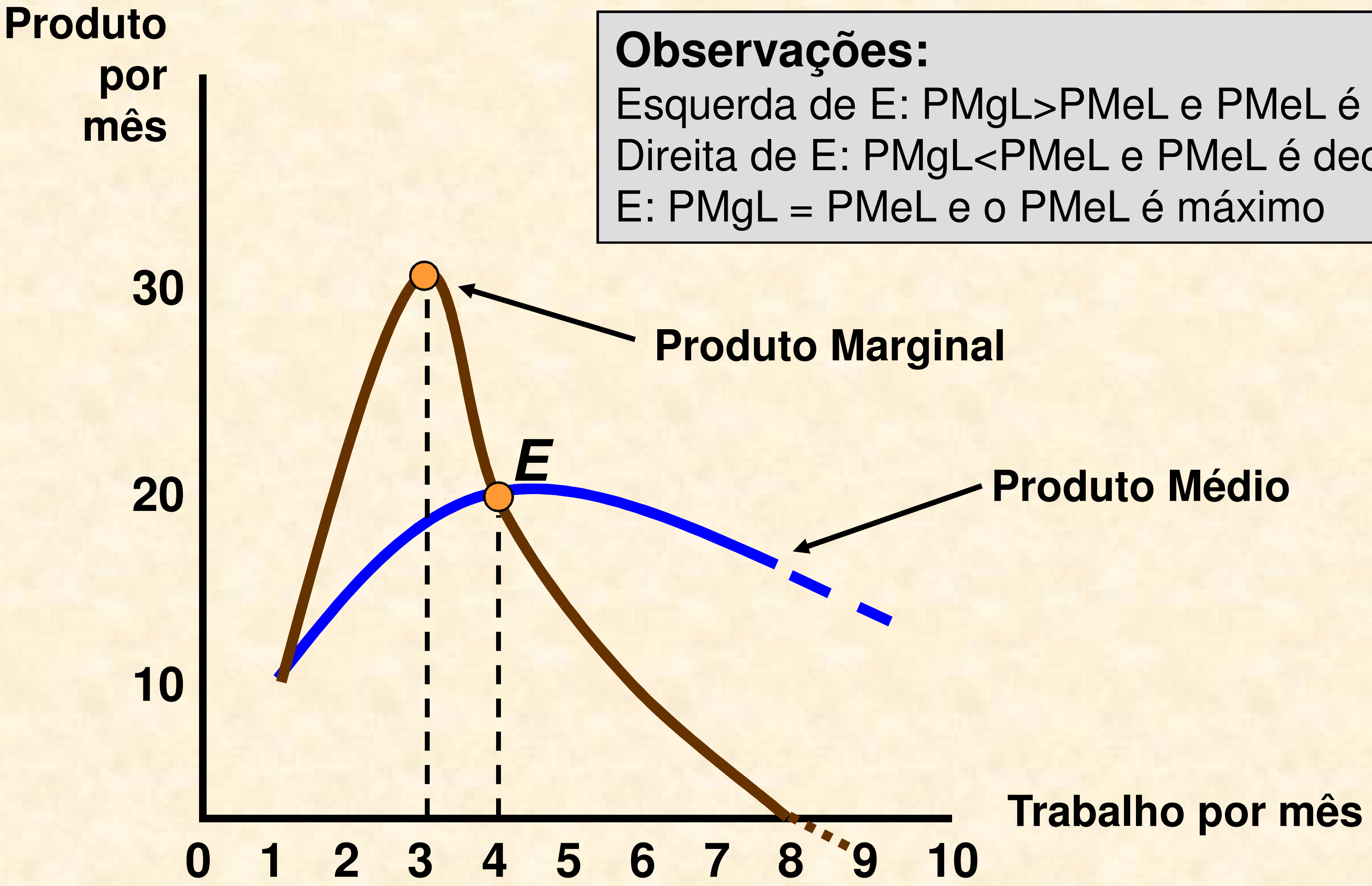
- **Ponto B**
  - **Até esse ponto,o produto cresce à taxas crescentes, ou seja, o produto marginal é crescente até B. Como a partir desse ponto o produto total começa a crescer à taxas decrescentes devido a lei dos rendimentos marginais decrescentes, B é o ponto de máximo da PMgL.**
- **Ponto D**
  - **Ponto de produto total máximo. Dessa forma já foram esgotados os acréscimos possíveis ao produto, ou seja, o PMgL é igual a zero nesse ponto.**

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

- **Ponto C**
  - Ponto de máximo do produto médio. Como PMeL = Q / L, podemos quantificá-lo em qualquer ponto, como em B, calculando 0-60 / O-3 . Como tal cálculo mede a inclinação da reta que sai da origem, podemos dizer que o produto médio será máximo no ponto em que tal reta for mais inclinada, o que ocorre no ponto C. Nesse mesmo ponto, os produtos médio e marginal são iguais, pois como a PMgL mede a variação da quantidade proveniente de uma alteração na quantidade de mão-de-obra, ela pode ser calculada, em qualquer ponto, através da inclinação da reta tangente que passa por esse ponto.

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

Observações:
Esquerda de E: PMgL>PMeL e PMeL é crescente
Direita de E: PMgL<PMeL e PMeL é decrescente
E: PMgL = PMeL e o PMeL é máximo

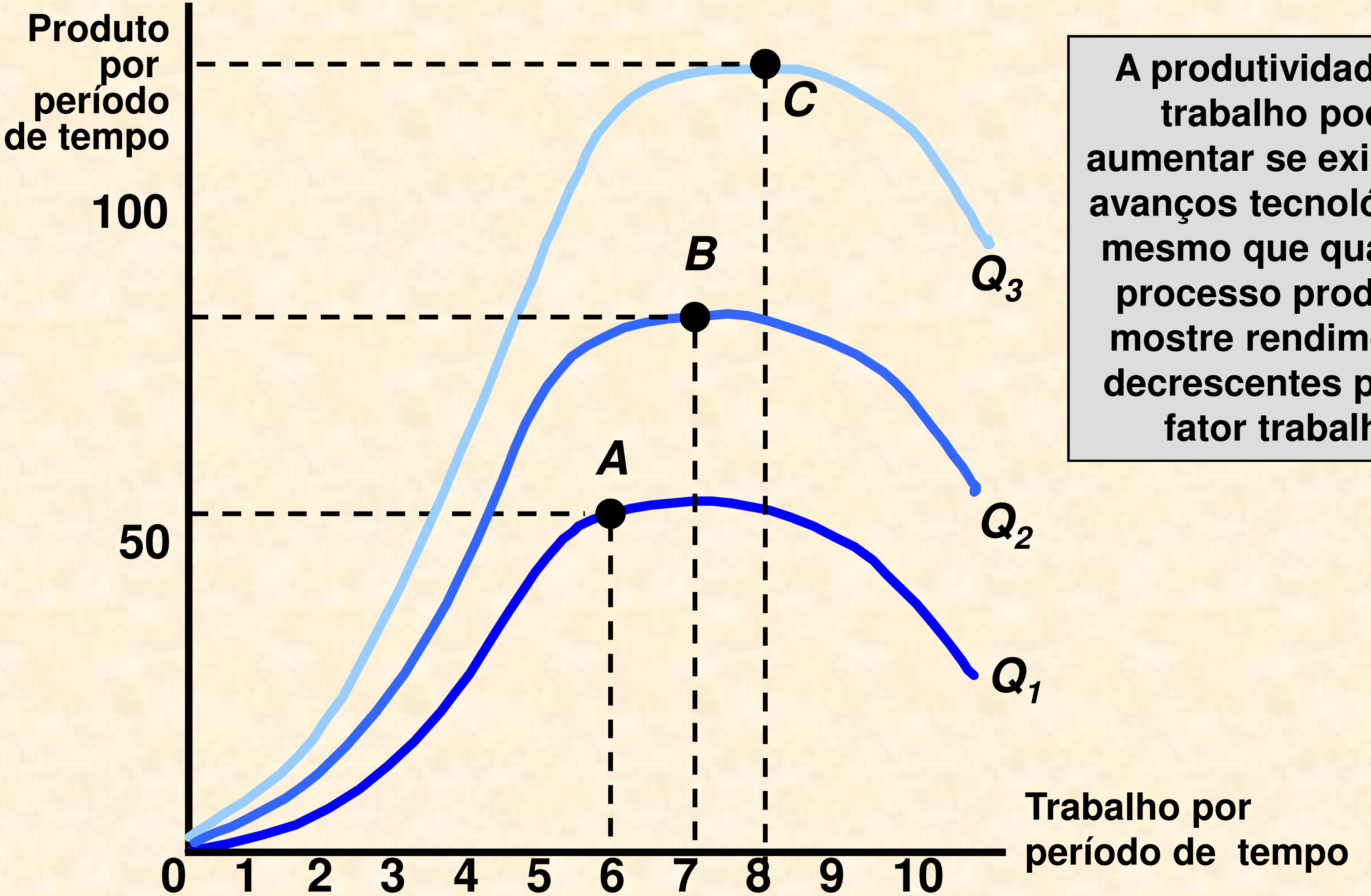


- **Algumas Conclusões:**
  - Quando a *PMgL* = 0, *Q está no seu* máximo
  - Quando a *PMgL > PMeL, a PMeL é crescente*
  - Quando a *PMgL < PMeL, a PMeL* é decrescente
  - Quando *PMgL = PMeL, a PMeL é máxima*

A Lei dos Rendimentos Decrescentes

- Pode ser usada nas decisões de longo prazo, para a análise das opções de produção com diferentes tamanhos de fábricas.
- Assume que a qualidade do insumo variável é constante, assim como a tecnologia.
- Descreve um PMgL declinante, mas não necessariamente um PMgL negativo.

O Efeito dos Avanços Tecnológicos



A produtividade do trabalho pode aumentar se existirem avanços tecnológicos, mesmo que qualquer processo produtivo mostre rendimentos decrescentes para o fator trabalho.

Um Exemplo Quantitativo

$$Seja \quad Q = -L^3 + 45L^2 \quad uma \quad função \quad de \quad produção,$$

$$onde \quad L \quad representa \quad o \quad n° \quad de \quad trabalhadores:$$

- A) Determine as funções PMgL e PMeL.
- B) Determine o número de trabalhadores para obtermos o máximo da PMeL e da PMgL.
- C) Determine os valores máximos para a PMeL e para a PMgL.
- D) Qual o nível máximo de produto que pode ser obtido ?

Um Exemplo Quantitativo

- **A)**

$$PMgL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL} \Rightarrow \boxed{PMgL = -3L^2 + 90L}$$

$$PMeL = \frac{Q}{L} = \frac{-L^3 + 45L^2}{L} \Rightarrow \boxed{PMeL = -L^2 + 45L}$$

Um Exemplo Quantitativo

- **B)**

$$máx.\ \ PMgL \Rightarrow \frac{dPMgL}{dL} = 0 \Rightarrow -6L + 90 = 0 \Rightarrow \boxed{L = 15}$$

$$Checando\ se\ é\ um\ \ ponto\ de\ máximo:$$

$$\frac{d^2 PMgL}{dL^2} = -6 < 0 \Rightarrow máximo$$

Um Exemplo Quantitativo

- **B)**

$$máx.\ PMeL \Rightarrow \frac{dPMeL}{dL} = 0 \Rightarrow -2L + 45 = 0 \Rightarrow \boxed{L = 22{,}5}$$

$$Checando\ se\ é\ um\ ponto\ de\ máximo:$$

$$\frac{d^2 PMeL}{dL^2} = -2 < 0 \Rightarrow máximo$$

Um Exemplo Quantitativo

- **C)**

$$L = 15 \Rightarrow PMgL = -3(15)^2 + 90(15) \Rightarrow$$

$$\boxed{PMgL_{(15)} = 675}$$

$$L = 22{,}5 \Rightarrow PMeL = \frac{-(22{,}5)^3 + 45(22{,}5)^2}{22{,}5} \Rightarrow$$

$$\boxed{PMeL_{(22,5)} = 506{,}25}$$

Um Exemplo Quantitativo

- **D)**

$$produto\ \ máximo \Rightarrow PMgL = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dL} = 0$$

$$\frac{dQ}{dL} = 0 \Rightarrow -3L^2 + 90L = 0 \Rightarrow dois\ \ pontos\ \ críticos:$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-90 \pm \sqrt{8100 - 0}}{-6} \Rightarrow L_1 = 0 \quad e \quad \boxed{L_2 = 30}$$

Um Exemplo Quantitativo

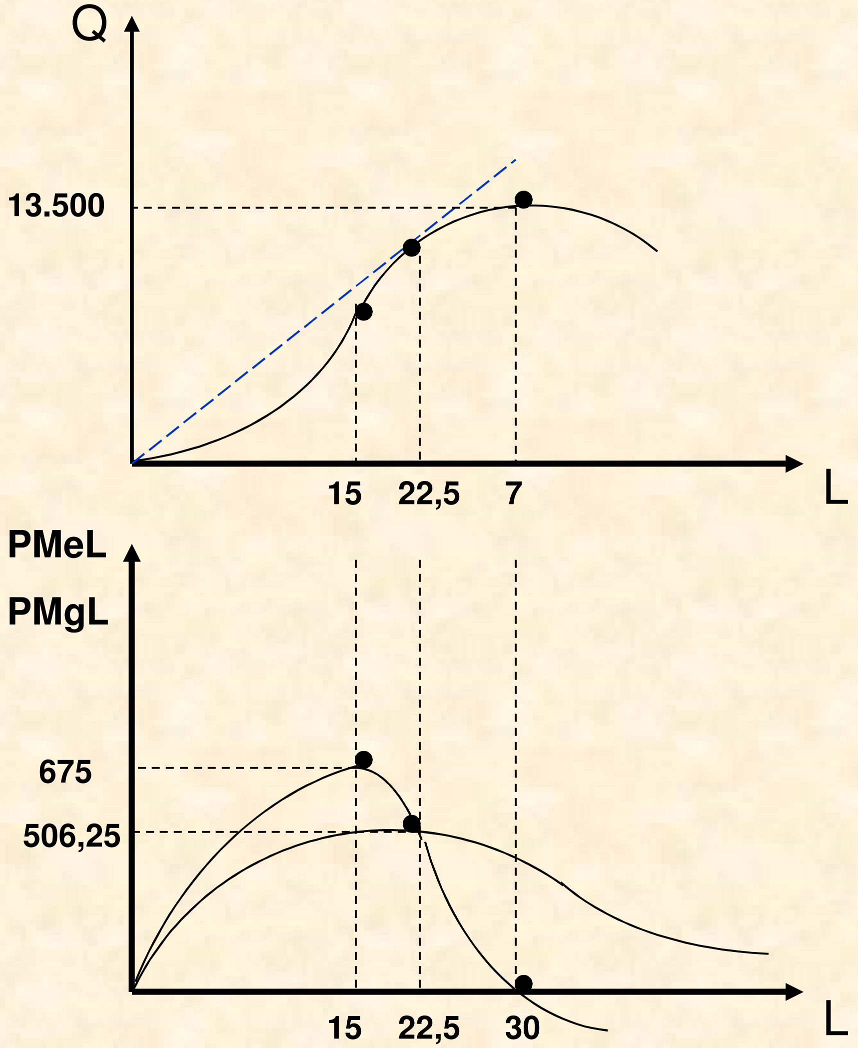
- D)

$$checando \ : \quad \frac{d^2Q}{dL^2} = -6L + 90 < 0 \Rightarrow \quad máximo$$

$$com \ \ L = 30 \Rightarrow \boxed{Q_{máx} \ = 13500}$$

- **Note que a função de produção possui um ponto de inflexão, para L = 15. Com L < 15 o produto cresce à taxas crescentes e com L > 15 o produto cresçe à taxas decrescentes, ou seja, a segunda derivada da função de produção é igual a zero para L = 15.**

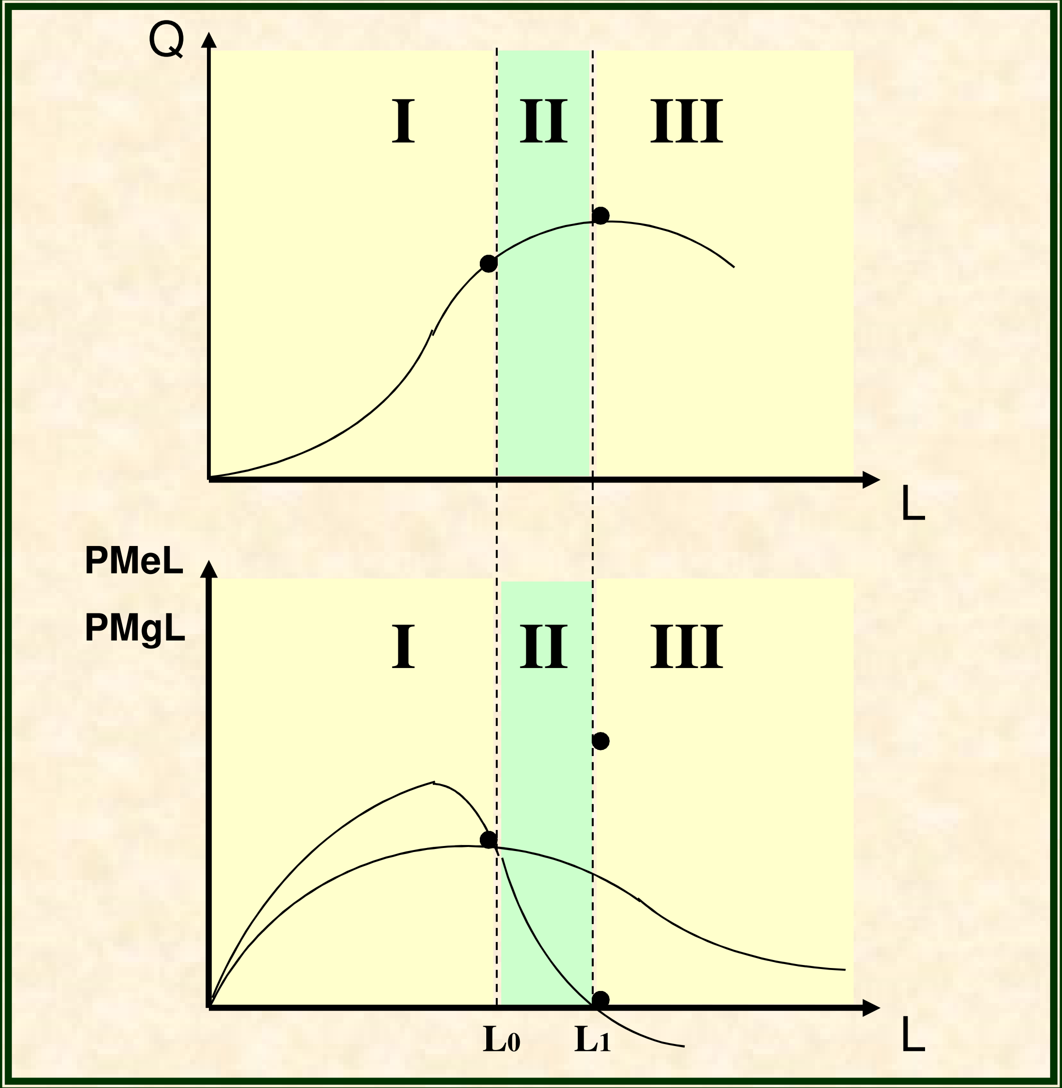
Um Exemplo Quantitativo



Os Estágios de Produção

- Agora que já conhecemos as curvas de produto total médio e marginal, podemos determinar a região econômica de produção. Na verdade, estamos interessados em saber qual a quantidade de mão-de-obra que a firma deve contratar.

Os Estágios de Produção



Os Estágios de Produção

- **Estágio III**
  - Aqui poderíamos obter uma produção maior diminuindo a quantidade de mão-de-obra. Não faz sentido produzir onde o produto marginal é negativo.
- **Estágio I**
  - Note que ao aumentar a quantidade de mão-de-obra, a produção aumenta, assim como o produto médio. Dessa forma, trabalhar no estágio I implica em subutilização do estoque de capital.
- **Estágio II**
  - Essa é a região econômica de produção, pois apesar de termos Pmg e Pme decrescentes, ambos ainda são positivos.

Os Estágios de Produção

- A Escolha no Estágio II
  - A quantidade de mão-de-obra a ser contratada pela firma, dentro do estágio II, depende de:

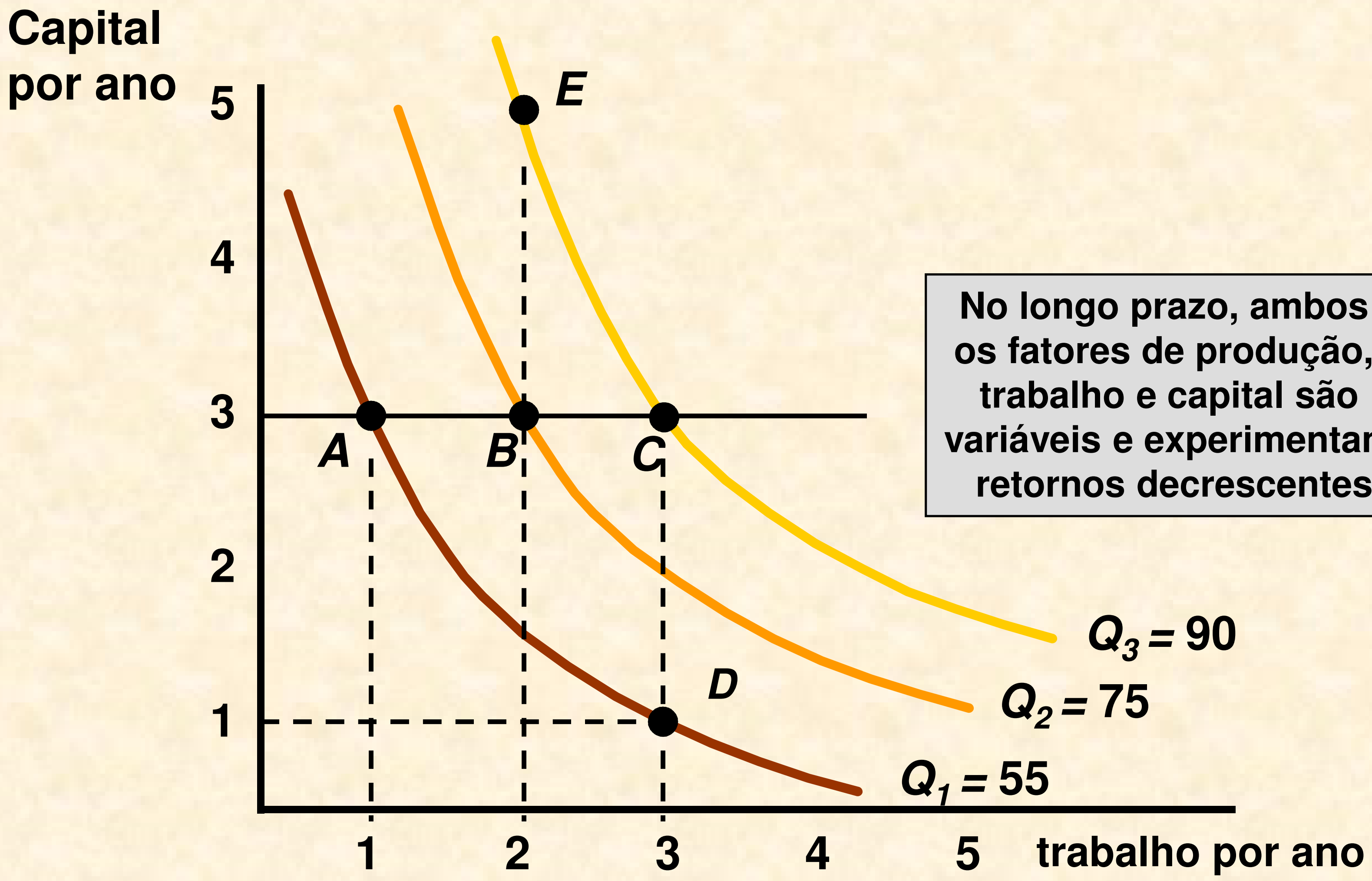
Insumos Gratuitos → Produção em L_1 → Maximização da produção

Insumos Caros → Produção em L_0 → Maximização da produtividade

Produção com Dois Insumos Variáveis

- Agora que já estudamos a relação entre produção e produtividade, quando o estoque de capital está fixo, vamos considerar a produção no longo prazo.
  - No longo prazo *K e L* são variáveis.
  - As Isoquantas analisam e comparam as diferentes combinações de *K e L* que geram o mesmo nível de produto.

A Forma das Isoquantas



No longo prazo, ambos os fatores de produção, trabalho e capital são variáveis e experimentam retornos decrescentes

Produção com Dois Insumos Variáveis

- A Substituição entre Insumos
  - Os administradores querem determinar que combinação de insumos devem utilizar.
  - A inclinação da isoquanta mostra o *trade-off* existente entre os dois insumos, mantida a produção constante.

- A Substituição entre Insumos
  - A Taxa Marginal de Substituição Técnica

$$\underbrace{TMST_{(K,L)}}_{\text{Para um mesmo nível de Q}} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{dK}{dL} = -\frac{PMgL}{PMgK}$$

- Observações:
  - *TMgS* e Produtividade Marginal
    - A variação no produto, dada uma variação no fator trabalho é igual a:

$$\boxed{(PMgL)(\Delta L)}$$

    - A variação no produto, dada uma variação do estoque de capital é igual a:

$$\boxed{(PMgK)(\Delta K)}$$

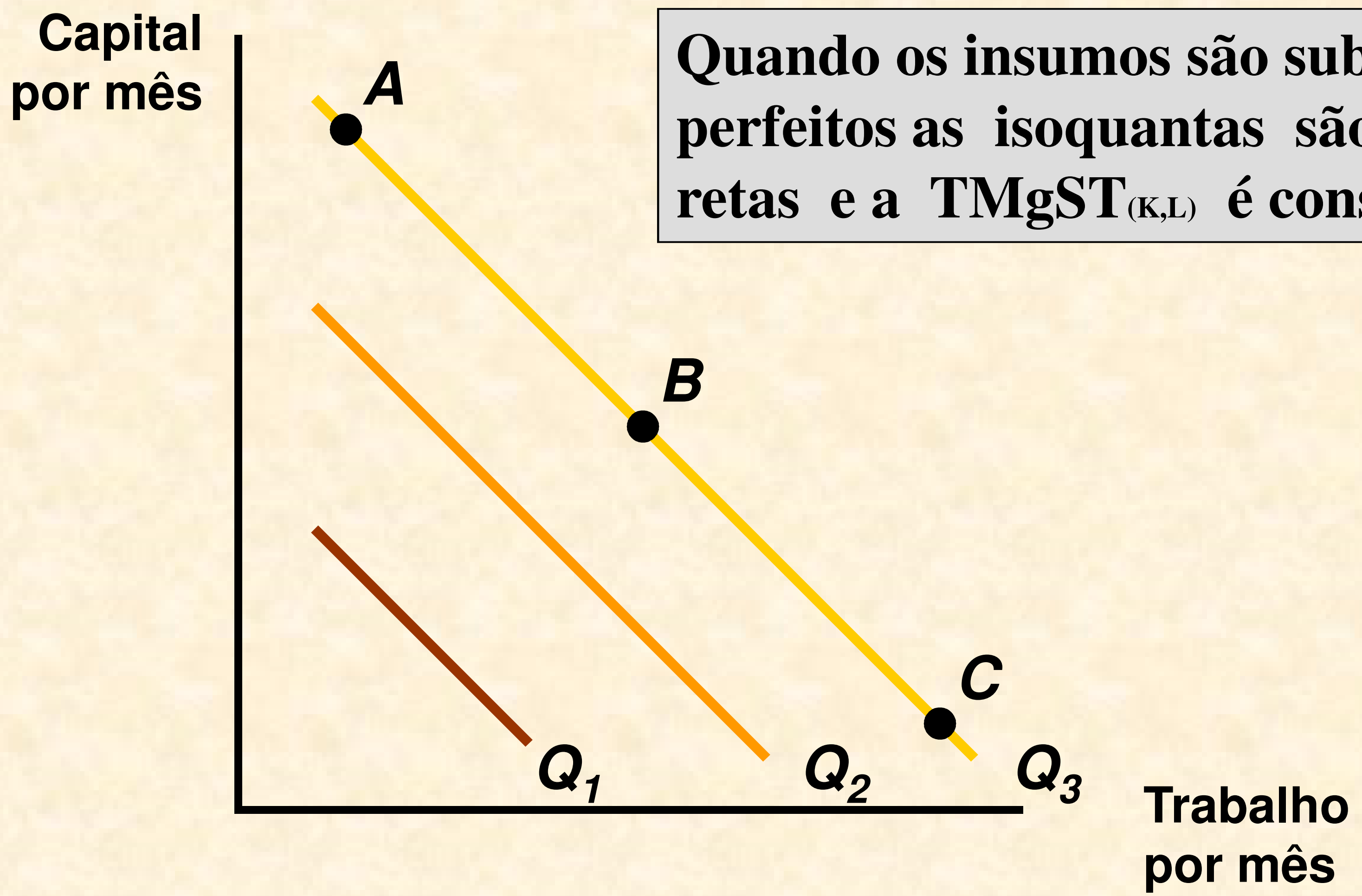
- Observações:
  - *TMgS* e Produtividade Marginal
    - Como, ao longo de uma isoquanta, o nível de produção é constante:

Equação da isoquanta

$$(PMgL)(\Delta L)+(PMgK)(\Delta K)=0$$

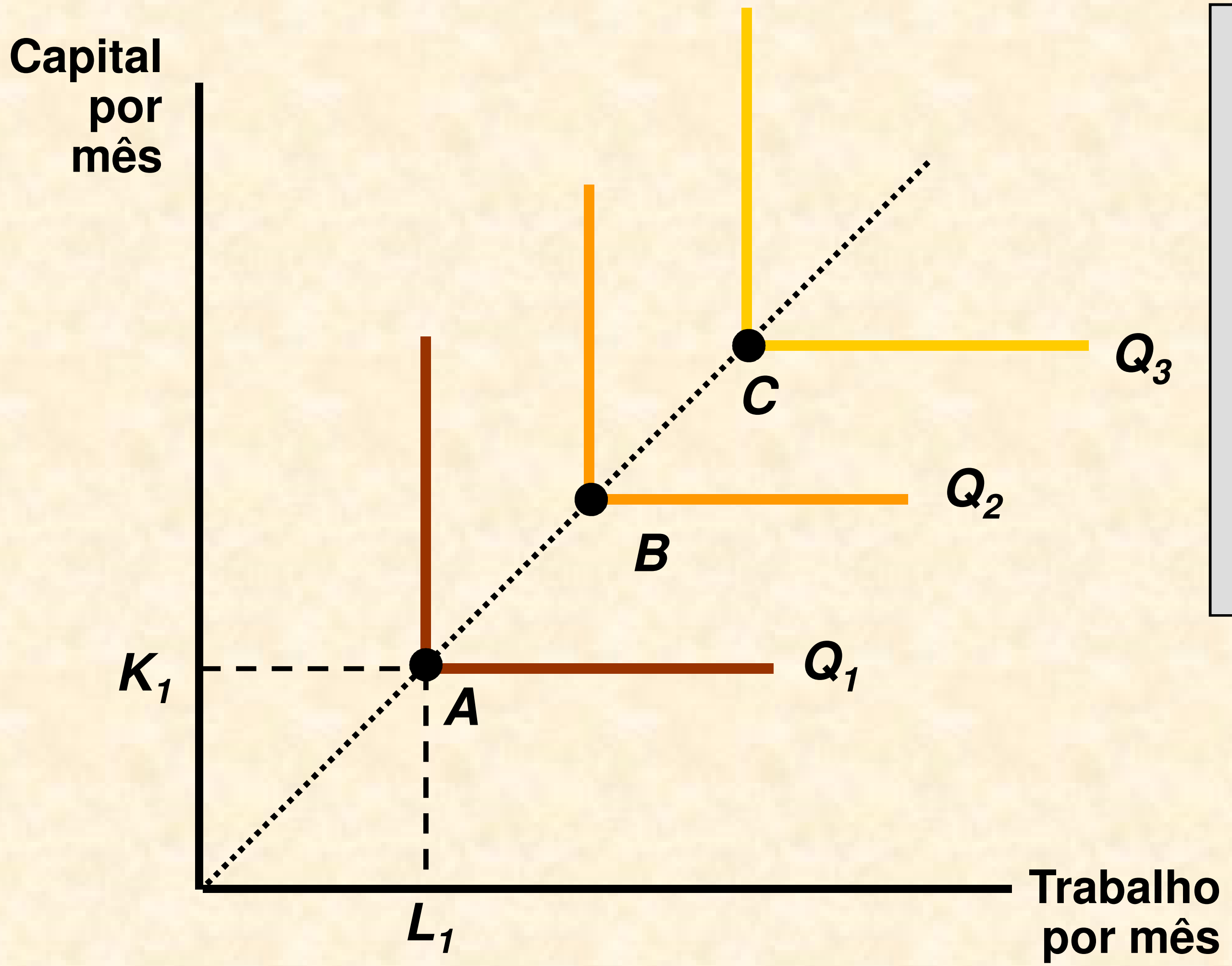
$$TMgST_{(K,L)} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{PMgL}{PMgK}$$

Isoquantas quando os Insumos são Substitutos Perfeitos



Quando os insumos são substitutos perfeitos as isoquantas são linhas retas e a TMgST$_{(K,L)}$ é constante

Função de Produção de Proporções Fixas



Função de produção de proporções fixas, onde a produção varia de acordo com a variação de ambos os insumos em uma certa proporção fixa. Logo, a $TMgS_{(K,L)} = 0$

Produção com Dois Insumos Variáveis

Função de Produção de Proporções Fixas

- Observações:
  - Não é possível a substituição entre os insumos capital e trabalho. Cada produção requer uma quantidade específica de cada insumo. Um exemplo disso é o processo produtivo de corte de árvores. Se um homem e uma motosserra cortam 10 árvores, ao adicionarmos uma uinidade a mais de trabalho, o número de árvores abatidas permanece constante.

Produção com Dois Insumos Variáveis

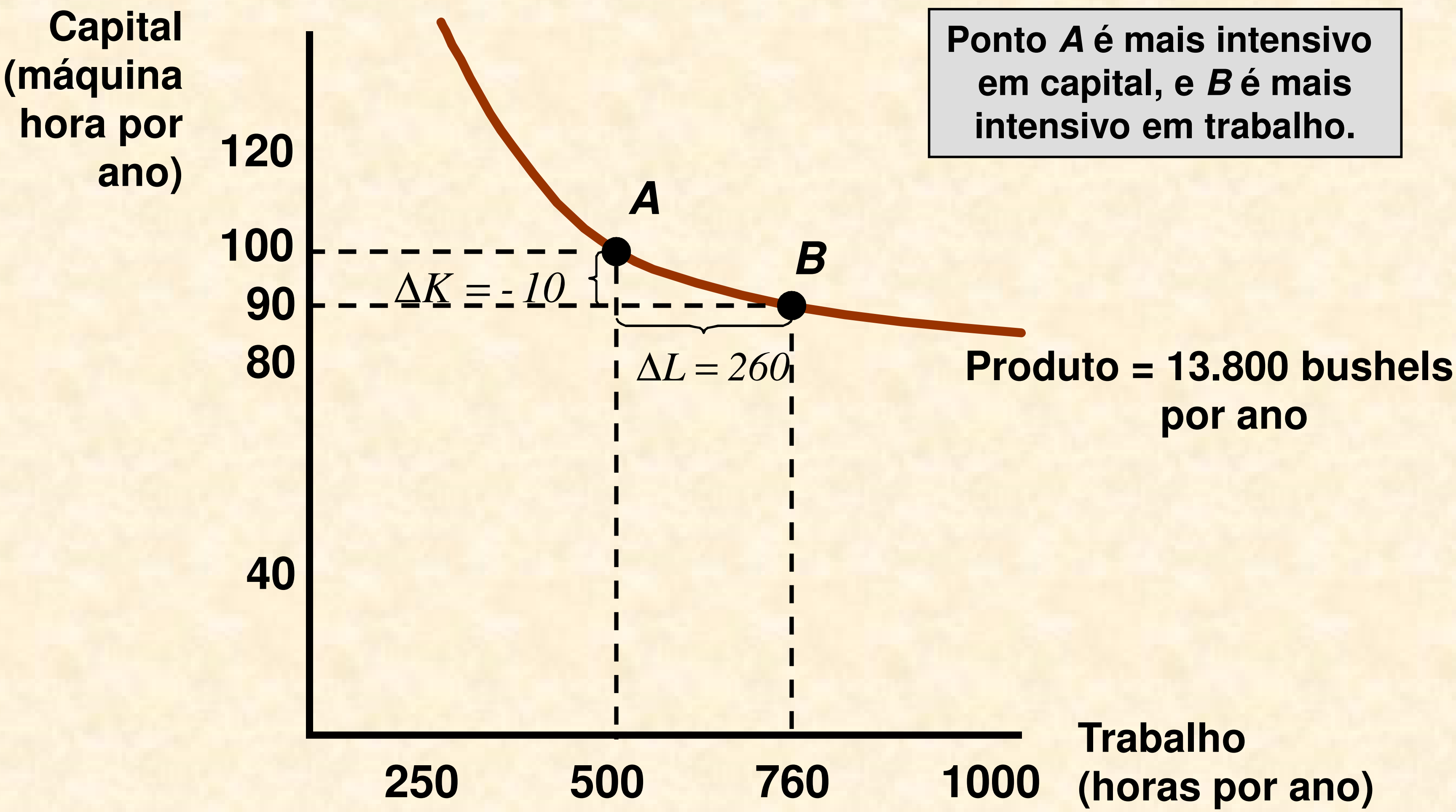
Função de Produção de Proporções Fixas

- Observações:
  - O aumento da produção requer mais mão-de-obra e capital. Desta forma a produção aumenta quando nos movemos de *A para B e para C, onde temos combinações de capital e trabalho tecnicamente* eficientes.

Uma Função de Produção Para o Trigo – Exemplo 6.3

- Os produtores agrícolas devem escolher entre um processo produtivo intensivo em capital ou trabalho.

Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo



Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo

- Observações:
  - Operando em *A:*
    - L = 500 horas e K = 100 máquinas horas.
  - Operando em B
    - Aumenta L para 760 e diminui K para 90. Logo, TMST < 1:

$$\boxed{TMgST = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -(10/260) = -0{,}0385}$$

Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo

- Observações:
  - TMgST = 0,0385 significa que, para manter os atuais níveis de produção, seriam necessárias 260 unidades de trabalho para substituir 10 unidades de capital.
  - Se a mão-de-obra é cara, o produtor deve utilizar mais capital (Exemplo: E.U.A.).
  - Se mão-de-obra é barata, o produtor deve utilizar mais trabalho (Exemplo: Índia).

Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo

- Observações:
  - Entretanto, para resolvermos se o melhor processso produtivo envolve uma elevada proporção de capital/trabalho, como nos EUA, ou se envolve uma baixa proporção de capital/trabalho, como na Índia, precisamos conhecer os preços dos insumos, ou seja, precisamos conhecer os custos de produção. Trataremos desse assunto no próximo capítulo.

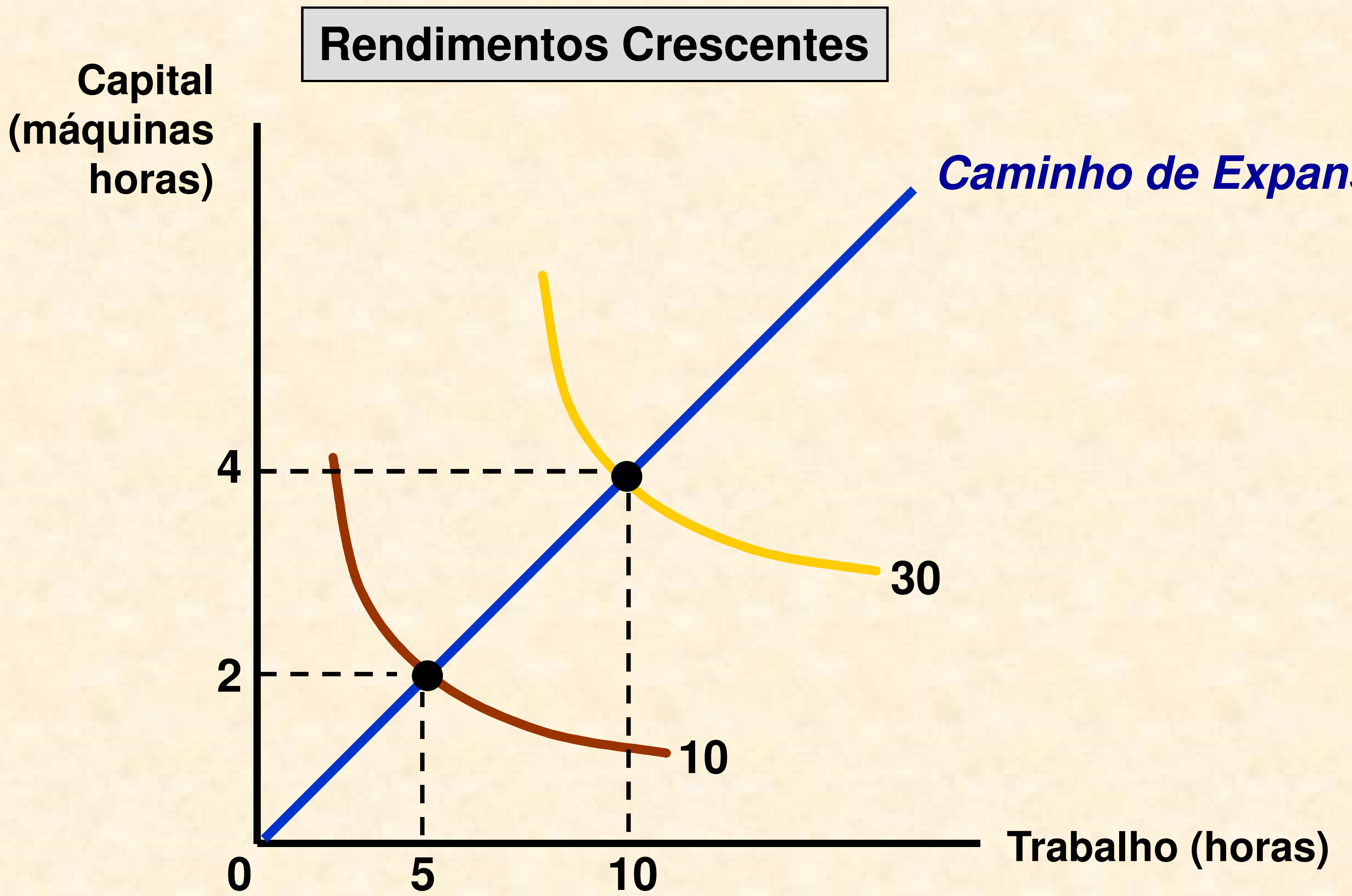
Rendimentos de Escala

- Sendo os dois insumos variáveis (Longo Prazo), devemos nos perguntar qual o impacto sobre a produção de uma **alteração proporcional em ambos os insumos.** Tal alteração é chamada de mudança na **escala de produção**, e pode gerar três resultados:

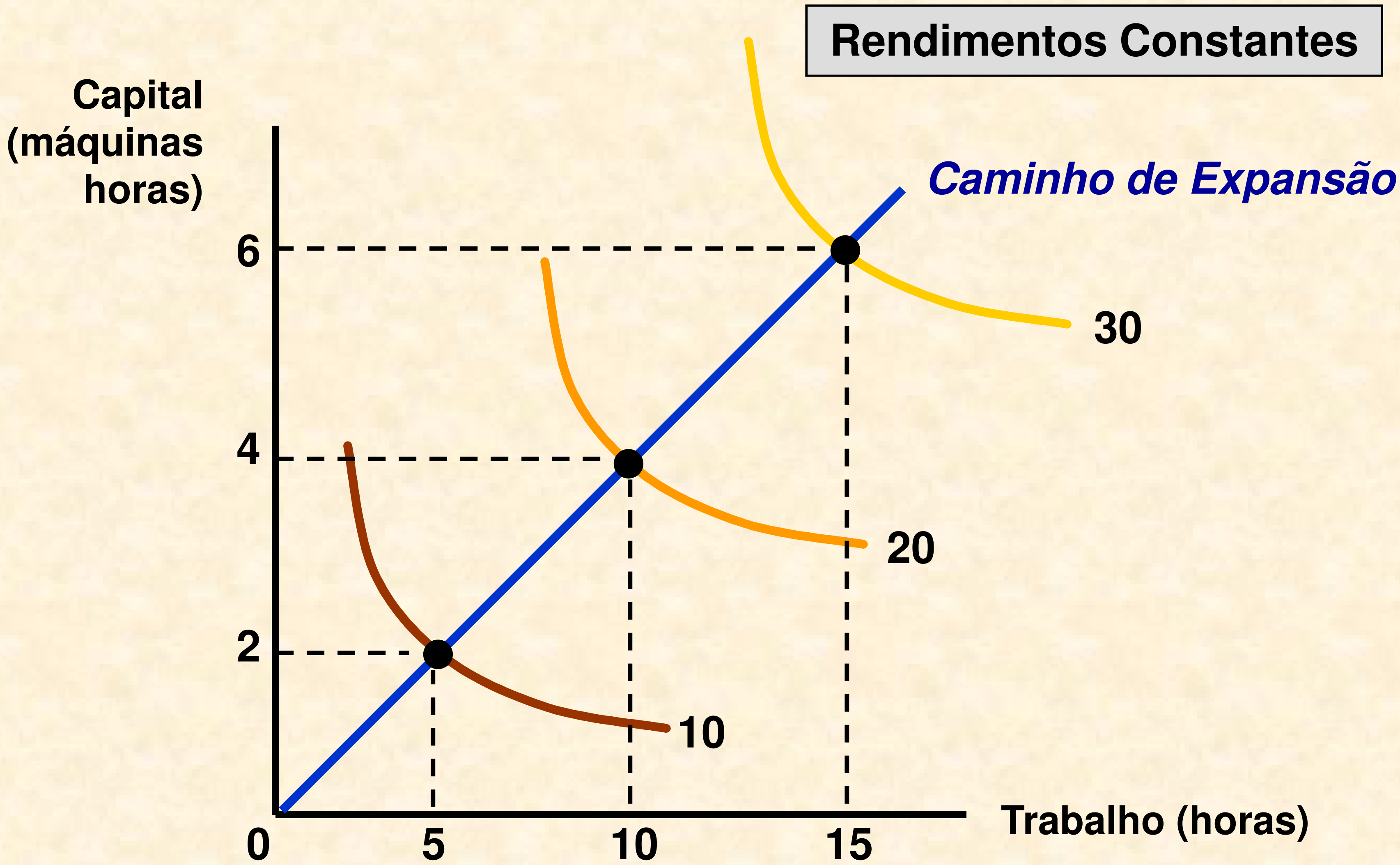
Rendimentos de Escala

- **Rendimentos Crescentes de Escala**
  - Ao variarmos ambos os insumos proporcionalmente, a produção varia mais que proporcionalmente.
- **Rendimentos Constantes de Escala**
  - Ao variarmos ambos os insumos proporcionalmente, a produção também varia proporcionalmente.
- **Rendimentos Decrescentes de Escala**
  - Ao variarmos ambos os insumos proporcionalmente, a produção varia menos que proporcionalmente.

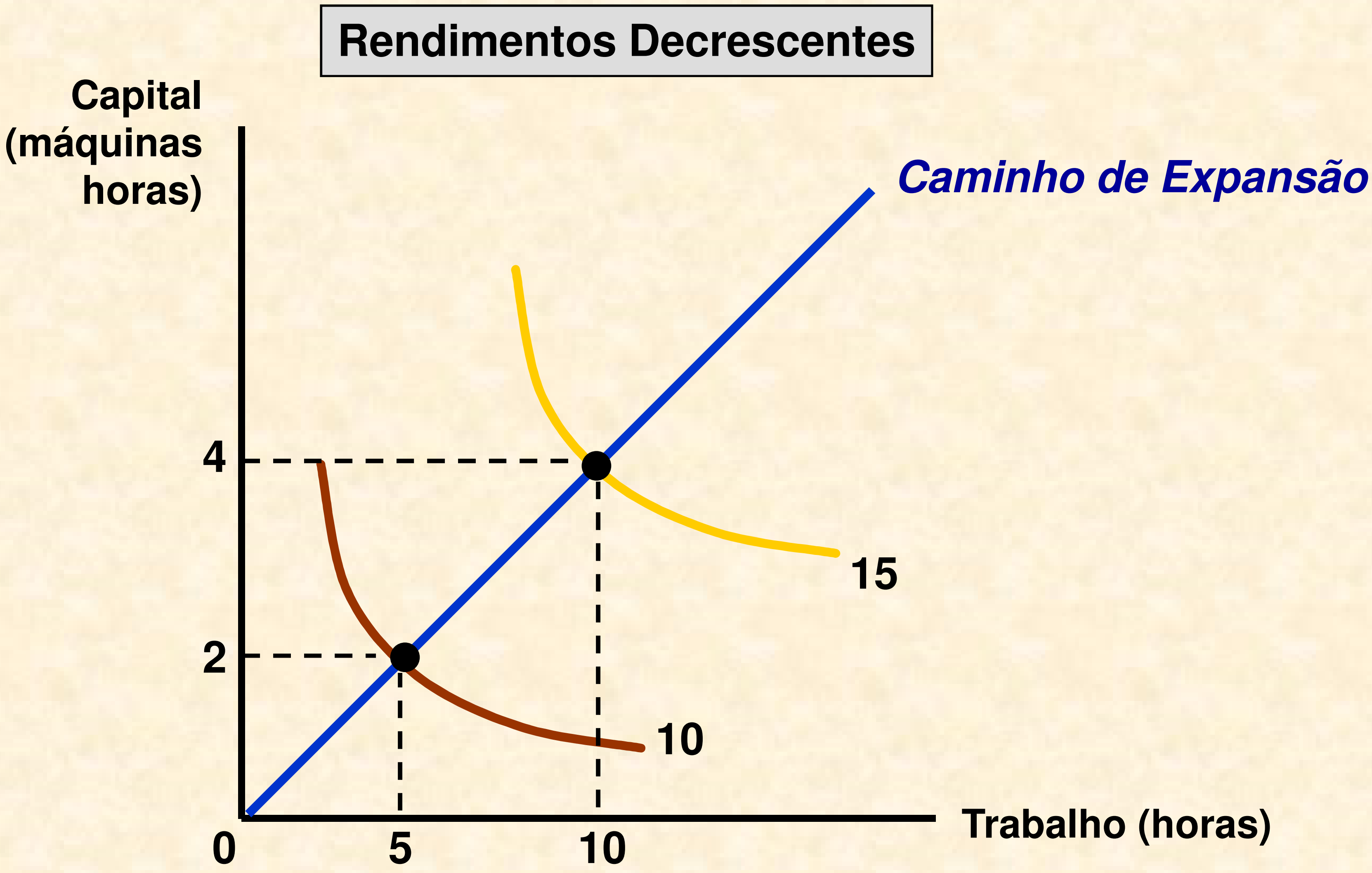
Rendimentos de Escala



Rendimentos de Escala



Rendimentos de Escala



Razões Para a Existência de Economias de Escala

- Indivisibilidade de Equipamentos e da Própria Planta
  - Certos tipos de maquinárias e de disposição (*layout)* da planta só são economicamente factíveis após determinados tamanhos mínimos, de modo que plantas menores devem utilizar máquinas ou disposições internas com menor eficiência.
- Indivisibilidade de Financiamentos
  - Maiores financiamentos, menores os custos unitários.
- Indivisibilidade de Operações Mercadológicas
  - Evidentemente, antes que as atividades mercadológicas e de pesquisa possam alcançar seu dimensionamento ótimo e, consequentemente, possam ser atingidos custos unitários menores, há necessidade de que tanto a produção como o nível de vendas atinjam uma certa magnitude.

Razões Para a Existência de Economias de Escala

- Preços Reduzidos dos Fatores
  - Aquisições de matérias-primas em grandes quantidades propiciam, geralmente, menores custos unitários.
- Benefícios Organizacionais
  - Derivados da eficiência de uma melhor coordenação e planejamento das atividades da firma.
- Especialização do Trabalho
  - À medida que o processo cresce e pode ser_realizado por partes, cresce a especialização do trabalho, com aumento da produtividade e redução de custos.

Razões Para a Existência de Deseconomias de Escala

- Perda de Eficiência
  - Em decorrência da complexidade crescente assumida pelas atividades de coordenação e organização da firma.
- Custos Crescentes dos Fatores não Reprodutivos
  - Tais como valores de arrendamento, de organização do trabalho e de aperfeiçoamento da mão-de-obra.
- Desenvolvimento de Funções Subsidiárias
  - Tais como as despesas jurídicas ou legais e dispêndios com relações públicas.

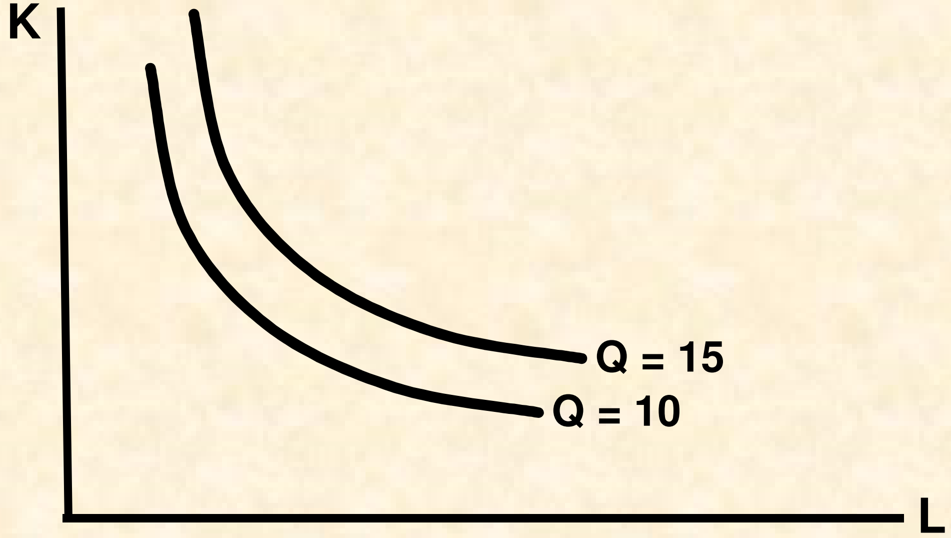
Extensões

- A abordagem desenvolvida anteriormente para o longo prazo foi bastante intuitiva.
- Agora, veremos, de maneira mais formal, alguns tópicos importantes, relativos a algumas funções de produção específicas.

Função de Produção Cobb-Douglas

$$Q = AK^{a}L^{\beta}$$

- **Isoquantas Convexas**
  - Existe substitutibilidade imperfeita entre os fatores de produção.



Função de Produção Cobb-Douglas

$$Q = AK^{a}L^{\beta}$$

- Rendimentos de Escala
  - Multiplique os fatores de produção não-rivais por uma constante arbitrária e observe o resultado.

$$Q = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda K)^{\beta} \Rightarrow \left[AK^{\alpha}L^{\beta}\right]\lambda^{\alpha+\beta} \Rightarrow Q\lambda^{\alpha+\beta}$$

- Logo:
  - Se $(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow$ Rendimentos Constantes de Escala
  - Se $(\alpha + \beta) > 1 \Rightarrow$ Rendimentos Crescentes de Escala
  - Se $(\alpha + \beta) < 1 \Rightarrow$ Rendimentos Decrescentes de Escala

Função de Produção Cobb-Douglas

- Produtividades Marginais e $TMgS_{(K,L)}$

$$PMgL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}$$

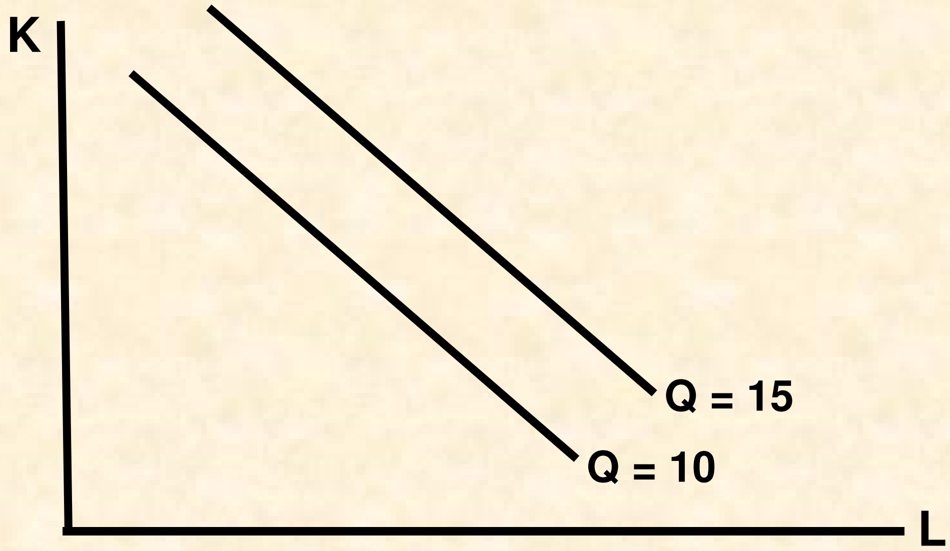
$$PMgK = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}$$

$$TMgS_{(K,L)} = -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial L}}{\dfrac{\partial Q}{\partial L}} = -\frac{PMgL}{PMgK} = -\frac{\beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}}{\alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}} = -\frac{\beta K}{\alpha L}$$

Função de Produção Linear

$$Q = \alpha K + \beta L$$

- **As Isoquantas são Retas**
  - Existe substitutibilidade perfeita entre os fatores de produção.



Função de Produção Linear

Rendimentos Constantes de Escala

$$\boxed{Q = \alpha K + \beta L \rightarrow \alpha\lambda K + \beta\lambda L \Rightarrow \lambda(\alpha K + \beta L) = \lambda Q}$$

$$PMgL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta$$

$$PMgK = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha$$

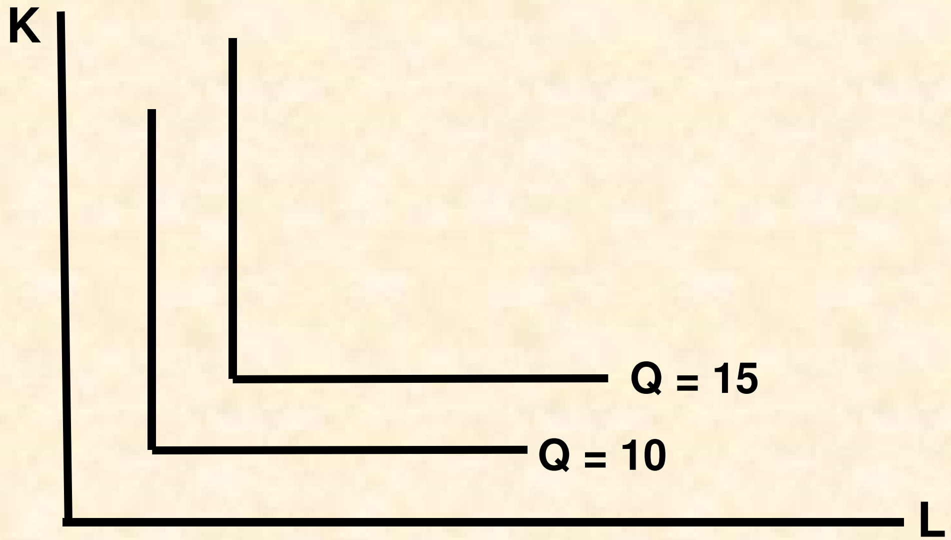
$$TMgS_{(K,L)} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial L}} = -\frac{PMgL}{PMgK} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

→ Inclinação constante das isoquantas

Função de Produção de Leontief

$$Q = \min\{\alpha K, \beta L\}$$

- **As Isoquantas são Retas**
  - Não existe substitutibilidade entre os fatores de produção.



Função de Produção de Leontief

Rendimentos Constantes de Escala

$$\boxed{Q = \min\{\alpha K, \beta L\} \rightarrow \min\{\alpha\lambda K, \beta\lambda L\} \Rightarrow \lambda \min\{\alpha K, \beta L\} = \lambda Q}$$

$$\mathrm{PMg}_K = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha K > \beta L \\ \alpha \text{ se } \alpha K < \beta L \end{cases}$$

$$\mathrm{PMg}_L = \begin{cases} 0 \text{ se } \beta L > \alpha K \\ \beta \text{ se } \beta L < \alpha K \end{cases}$$

$$\boxed{TMgS_{(K,L)} = 0}$$

Observação

- Cuidado: nem todas as funções onde os bens são complementos perfeitos apresentam retornos constantes de escala. Em um caso mais geral, os rendimentos de escala podem ser crescentes, constantes ou decrescentes.
- Seja a FDP dada por $Q = \left[\min\{\alpha K, \beta L\}\right]^a$

$$\to \left[\min\{(\lambda\alpha K),(\lambda\beta L)\}\right]^a \Rightarrow \lambda^a\left[\min\{\alpha K, \beta L\}\right]^a \Rightarrow \lambda^a Q$$

  - Logo, os retornos de escala dependem de a.

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- A elasticidade de substituição é uma medida que pode nos ajudar a descrever a oportunidade de substituição entre os fatores de produção.
- Ela nos mostra a variação percentual na relação capital/trabalho induzida por uma mudança de 1 ponto percentual na taxa marginal de substituição técnica, ao longo de uma isoquanta.
- Note que, conforme nos movemos ao longo da isoquanta, substituindo capital por trabalho a relação K/L vai diminuindo, assim como a taxa marginal de substituição técnica (lembre-se que a TMgs é decrescente)

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

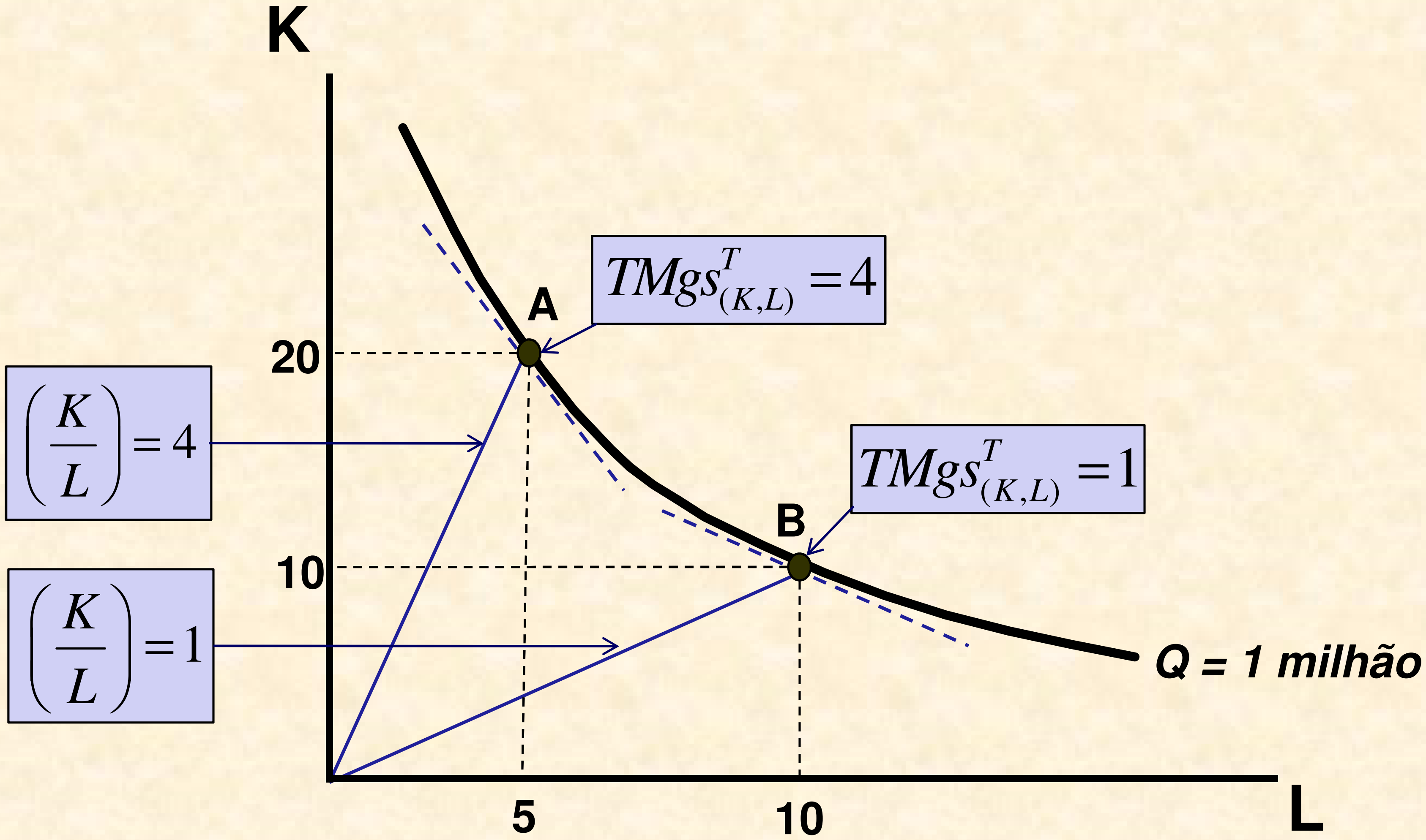
- **Elasticidade de Substituição = σ**

$$\sigma = \frac{\text{Variação Percentual na relação capital-trabalho}}{\text{Variação Percentual na TMgS}_{\mathbf{(k,L)}}}$$

$$\sigma = \frac{\%\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\%\Delta TMg_S^T} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln TMg_S^T}$$

OBS. A derivada do logaritmo natural de uma variável nos fornece, aproximadamente, a variação percentual dessa variável. Logo, muitas vezes, é mais conveniente aplicarmos log, seja por esse motivo, seja pelo fato de que a aplicação de log nos permite linearizar a função.

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)



A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- De um modo geral a FDP ESC pode ser apresentada como:

$$\boxed{Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}},$$

$$com \quad A, a \;\; e \;\; b > 0, \;\; \rho < 1 \;\; e \;\; \varepsilon > 0$$

- Em equilíbrio: $\boxed{TMgS^{T}_{(K,L)} = \dfrac{PMgL}{PMgK} = \dfrac{w}{r}}$

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- Relembrando:
- Eq. da isoquanta: $\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{PMgL}{PMgK}$

$$Logo, \quad se \quad Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1} \bullet \rho bL^{\rho-1}}{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}-1} \bullet \rho aK^{\rho-1}} = \frac{a}{b}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}$$

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- Aplicando log, temos:

$$\ln TMgS^{T}_{(K,L)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\rho)\ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$(1-\rho)\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln TMgS^{T}_{(K,L)} - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\ln TMgS^{T}_{(K,L)} - \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

- Aplicando a definição de elasticidade de substituição:

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

$$\sigma = \frac{d \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d \ln TMg_S^T} = \frac{1}{1-\rho}$$

$$\text{Logo:} \begin{cases} \rho \to 0 \Rightarrow \sigma \to 1 \\ \rho \to 1 \Rightarrow \sigma \to \infty \\ \rho \to -\infty \Rightarrow \sigma \to 0 \end{cases}$$

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- Escrevendo de outro modo:

$$Q = A\left[aK^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + bL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$Lembre-se \quad que \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

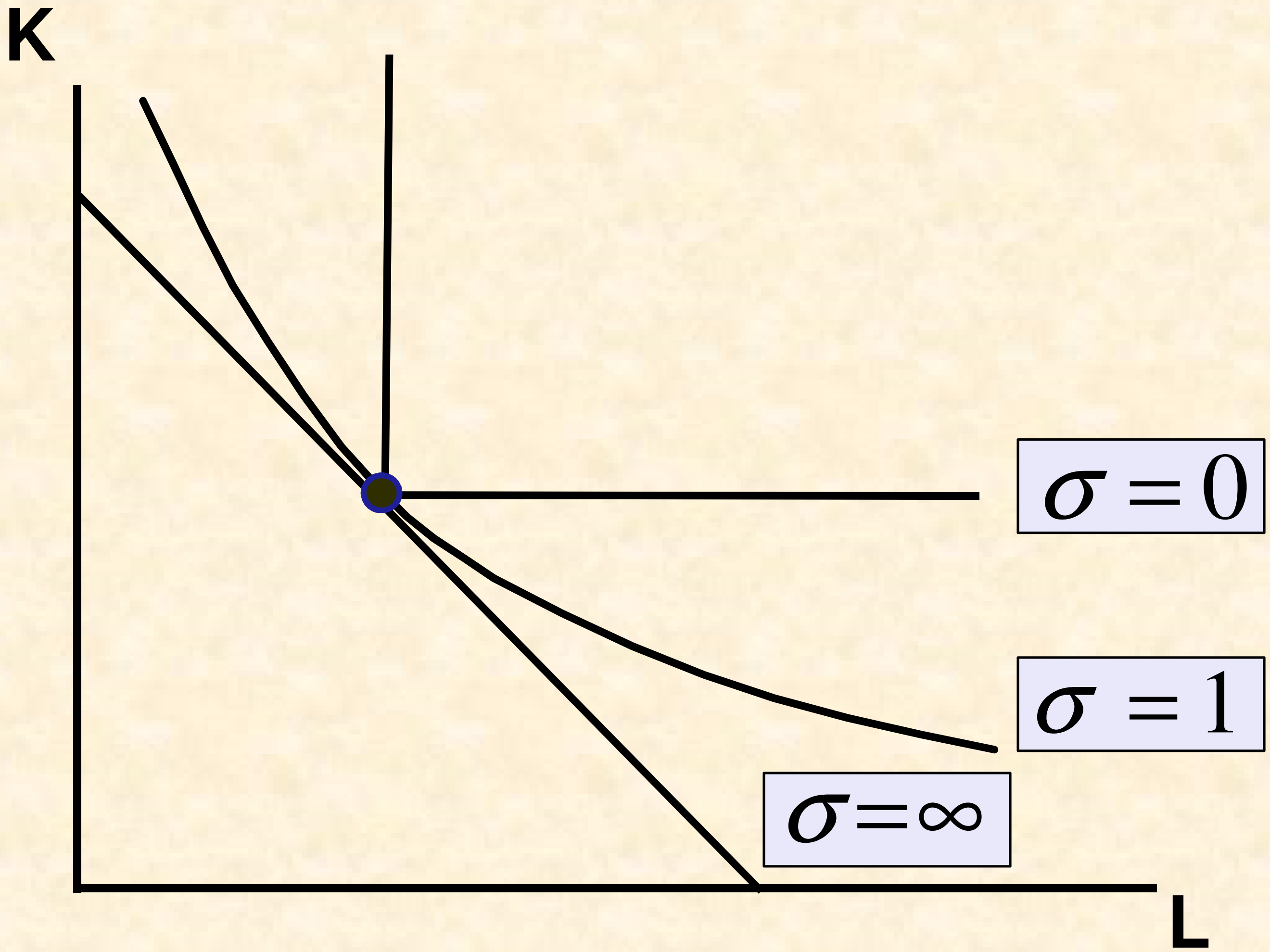
$$Se \quad \sigma \to \infty \Rightarrow substitutos \quad perfeitos$$

$$Se \quad \sigma \to 0 \Rightarrow complementares \quad perfeitos$$

$$Se \quad \sigma = 1 \Rightarrow Cobb-Douglas$$

- Observe que, dependendo da elasticidade de substituição, a função de produção ESC pode representar os três casos mais comuns com os quais trabalhamos em microeconomia.

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)



A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- Cobb-Douglas: $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$

$$TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}} \Rightarrow TMgS^{T}_{(K,L)} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \bullet TMgS^{T}_{(K,L)}. \quad Aplicando \quad \log$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln TMgS^{T}_{(K,L)}$$

$$\sigma = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln TMgS^{T}_{(K,L)}} = 1$$

Logo, uma Cobb-Douglas possui elasticidade de substituição constante, igual a 1.

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

Elasticidade Escala = ε

Multiplicando ambos os fatores de produção por uma constante positiva λ :

$$Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \left[(\lambda aK)^{\rho} + (\lambda bL)^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \left[\lambda^{\rho}\left(aK^{\rho} + bL^{\rho}\right)\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \lambda^{\rho\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)}Q \Rightarrow \boxed{\lambda^{\varepsilon}Q}$$

Logo
$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \Rightarrow RCE \\ \varepsilon > 1 \Rightarrow RCrE \\ \varepsilon < 1 \Rightarrow RDE \end{cases}$$

Assim, a existência de rendimentos constantes, crescentes ou decrescentes de escala depende de ε.

A Função de Produção ESC
(Elsticidade de Substituição Constante)

- **Exemplo. Suponha que:**

$$\boxed{Q=\left[K^{0,5}+L^{0,5}\right]^{2}}\Rightarrow Q=\left[K^{0,5}+L^{0,5}\right]^{\frac{1}{0,5}}\Rightarrow \varepsilon=1 \;\; e \;\; \rho=0,5.$$

Assim, a FDP apresenta retornos constantes de escala .

Como $\sigma = 1/1\text{-}\rho$, temos: $\sigma = 1/1\text{-}0,5 \Rightarrow \sigma = 2$.

Exemplo

Concurso ANPEC – 2013 – Questão 6

(Dado o que vimos, as respostas são automáticas)

- Considere a teoria da produção e indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

a) Se a função de produção for $f(K, L) = \left[K^a + L^a\right]^{v/a}$, com $a \leq 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, ela apresenta retornos crescentes de escala. **V**

b) O coeficiente de elasticidade de substituição σ de uma função de produção como $f(K, L) = \left[K^a + L^a\right]^{v/a}$, com $a < 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, é $\sigma = 1/(1-a)$. **V**

Exemplo

c) Funções de produção com elasticidade de substituição $\sigma = 0$ possuem isoquantas em formato de L. **V**

d) Se a tecnologia for monotônica, isso significa que não é possível produzir ao menos a mesma quantidade aumentando a quantidade de um dos insumos.

(F) Consumidor: Mais de um dos bens, maior utilidade.

Produção: Mais de um dos insumos, maior produção

c) Funções de produção do tipo Cobb-Douglas possuem elasticidade de substituição $\sigma = 1$. **V**

Exemplo

- **(ANP - 2008 - CESGRANRIO) - 42**
- A função de produção $Q = A\left(aK + bL\right)^{0,5}$, onde Q é o produto, K e L são os fatores de produção, e A, a e b são parâmetros com as unidades adequadas, apresenta
  (A) fatores de produção substitutos perfeitos.
  (B) retornos crescentes de escala.
  (C) aumento de produtividade, se A for positivo.
  (D) produtividade marginal crescente do fator K.
  (E) homogeneidade de grau um.

Resolvendo

$$Formato\ Geral\ da\ ESC$$

$$Q = A\left[aK^{\rho} + bL^{\rho}\right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$Logo:$$

$$Q = A\left[aK^{1} + bL^{1}\right]^{\frac{0,5}{1}} \Rightarrow RDE$$

$$\rho = 1\ e\ \sigma = \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow \sigma \to \infty \Rightarrow Substitutos\ Perfeitos$$

Exemplo

- **(BNDES 2007 - CESGRANRIO) - 33**
- A função de produção Q = min (aK, bL), onde Q = produto, K = fator capital, L = fator trabalho e a e b são parâmetros, apresenta
  (A) retornos crescentes de escala se a + b > 1.
  (B) retornos constantes de escala.
  (C) fatores de produção perfeitamente substitutos.
  (D) inovação tecnológica se a > b.
  (E) cada isoquanta como uma linha reta.

Como vimos, a função de Lenntief apresente retornos constantes de escala, possui isoquantas em formato de L e a $TMgS_{(K,L)} = 0$.