

**Curso DSc
Microeconomia
Bacen - Básico
2018**

Teoria da Produção

- A Tecnologia de Produção
- Isoquantas
- Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)
- Produção com Dois Insumos Variáveis
- Economias de Escala

- Nesta parte e na próxima (custos de produção) examinaremos a teoria da empresa sob a ótica da oferta:
 - Como a empresa toma as decisões de produção com base na minimização dos custos.
 - Como os custos variam com o volume de produção.
 - Características da oferta de mercado.

- Em economia a noção de prazo independe do tempo, portanto, definimos:
 - **Curto Prazo**
 - ◆ Período de tempo em que pelo menos um fator de produção é fixo.
 - **Longo Prazo**
 - ◆ Período de tempo necessário para que todos os fatores de produção tornem-se variáveis.

■ Firma

- ◆ Unidade técnica que produz bens ou serviços.

■ Fator de Produção

- ◆ São os bens e serviços transformáveis em produção, ou seja, os insumos, como mão-de-obra, materiais e Capital.

■ Processo de Produção

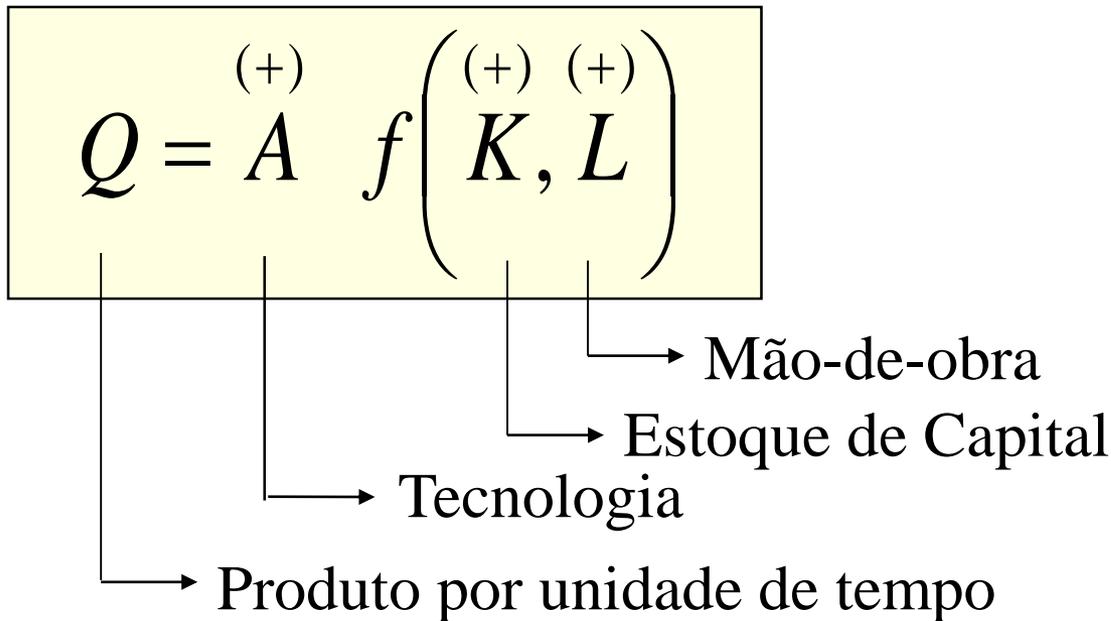
- ◆ Técnica ou tecnologia por meio da qual um ou mais produtos serão obtidos a partir da utilização de determinadas quantidades de fatores de produção.

■ Função de Produção:

- Nos mostra a quantidade máxima de produto que pode ser obtida através da utilização de certas quantidades de fatores de produção. Dito de outra forma, escolhido um processo de produção, a função de produção serve para quantificá-lo.
- Nos mostra o que é *tecnicamente viável* quando a empresa opera *eficientemente*.

A Tecnologia da Produção

- Portanto, a função de produção pode ser representada pela equação abaixo, onde acima de cada variável temos o sinal da respectiva derivada.

$$Q = A^{(+)} f \left(K^{(+)} , L^{(+)} \right)$$


→ Produto por unidade de tempo
 → Tecnologia
 → Estoque de Capital
 → Mão-de-obra

A Tecnologia da Produção

- Podemos considerar a tecnologia exógena no curto prazo, de forma que:

$$Q = f\left(\overset{(+)}{K}, \overset{(+)}{L}\right)$$

$Q = \textit{Produto}$, $K = \textit{Capital}$, $L = \textit{Mão-de-obra}$

- Para uma dada tecnologia

■ Isoquantas

- A curva demonstra todas as possíveis combinações de insumos que geram o mesmo volume de produção.

■ Assumindo que:

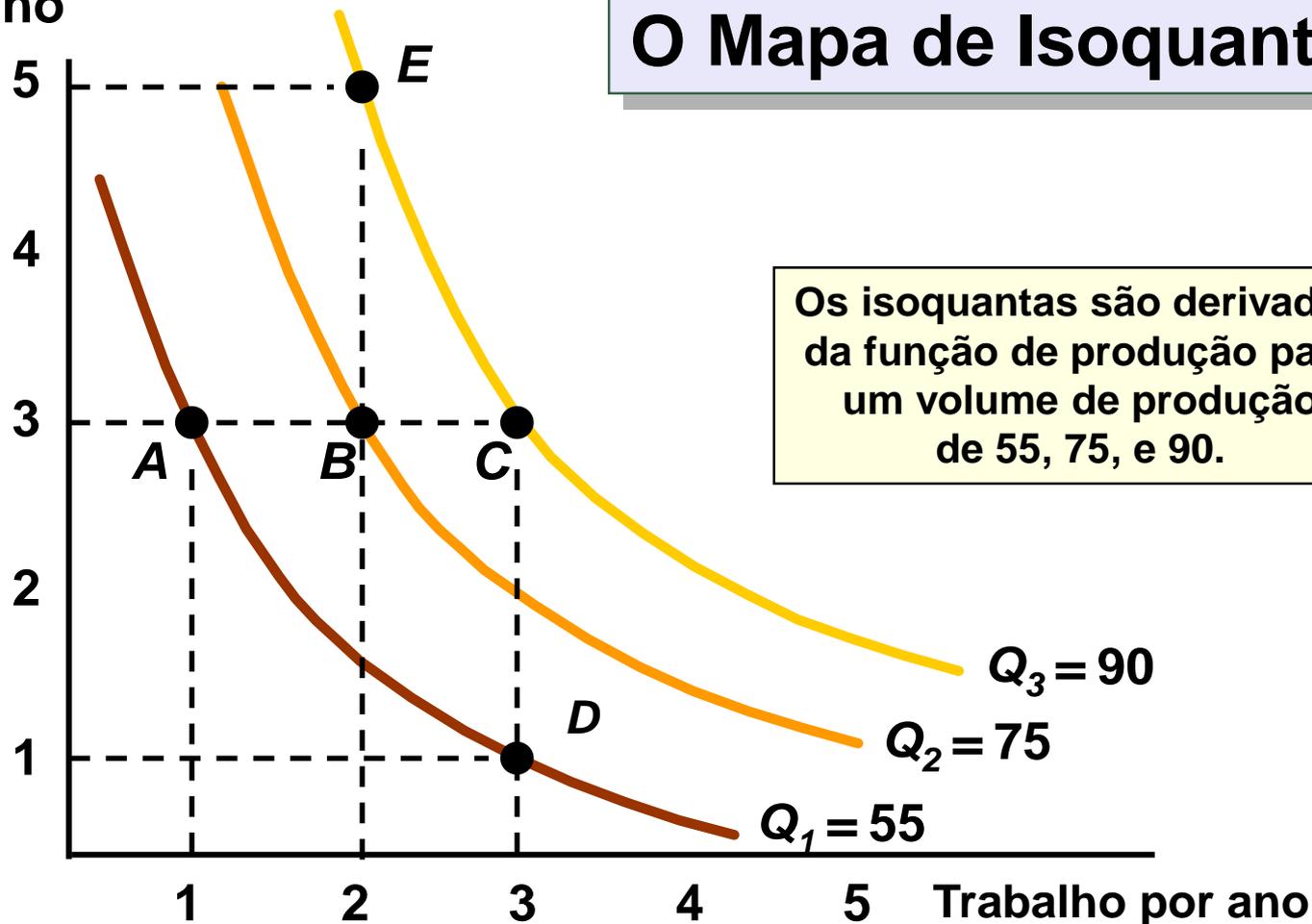
- A Produção de alimentos é gerada com dois insumos, K e L :
 - ◆ Para qualquer nível de K , o volume de produção aumenta com mais L .
 - ◆ Para qualquer nível de L , o volume de produção aumenta com mais K .
 - ◆ Várias combinações de insumos geram o mesmo volume de produção.

Produção com Dois Insumos Variáveis

Capital	Trabalho				
	1	2	3	4	5
1	20	40	55	65	75
2	40	60	75	85	90
3	55	75	90	100	105
4	65	85	100	110	115
5	75	90	105	115	120

Produção com Dois Insumos Variáveis

Capital
por ano



O Mapa de Isoquantas

Os isoquantas são derivados da função de produção para um volume de produção de 55, 75, e 90.

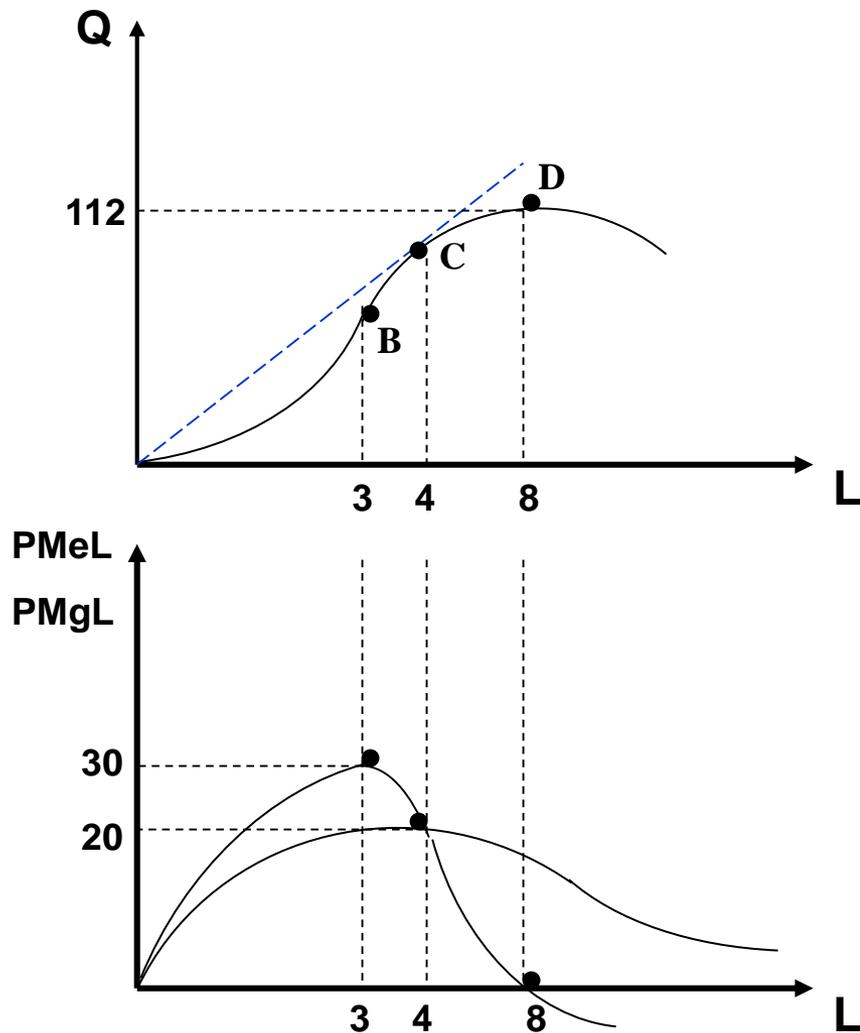
Flexibilidade do Insumo

- O isoquantas enfatizam como diferentes combinações de insumos podem ser utilizados para gerar o mesmo volume de produção.
- Essa informação permite ao produtor responder eficientemente às variações nos preços dos insumos.

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

Quantidade de Trabalho (L)	Quantidade de Capital (K)	Produto Total (Q)	Produto Medio	Produto Marginal
0	10	0	---	---
1	10	10	10	10
2	10	30	15	20
3	10	60	20	30
4	10	80	20	20
5	10	95	19	15
6	10	108	18	13
7	10	112	16	4
8	10	112	14	0
9	10	108	12	-4
10	10	100	10	-8

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)



■ Observações:

- 1) Com trabalhadores adicionais, produto (Q) aumenta, atingindo um máximo e então diminui.
- 2) O produto médio do trabalho ($PMeL$), ou produto por trabalhador, aumenta e então diminui.

$$PMeL = \frac{\textit{Produto}}{\textit{Insumo Trabalho}} = \frac{Q}{L}$$

■ Observações:

- 3) O produto marginal do trabalho (PMgL), ou produto do trabalhador adicional, inicialmente aumenta rapidamente e, então, diminui e fica negativo.

$$PMgL = \frac{\Delta \text{Produto}}{\Delta \text{Insumo Trabalho}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

- Isto ocorre devido a *lei dos rendimentos marginais decrescentes*
 - Mantendo-se a tecnologia e todos os insumos, exceto um deles, constantes, conforme são adicionados incrementos iguais do insumo variável, a taxa resultante de aumento do produto irá diminuir, a partir de certo ponto. Dito de outro modo, depois de um certo ponto, o produto físico marginal do insumo variável irá diminuir.

■ Ponto B

- Até esse ponto, o produto cresce à taxas crescentes, ou seja, o produto marginal é crescente até B. Como a partir desse ponto o produto total começa a crescer à taxas decrescentes devido a lei dos rendimentos marginais decrescentes, B é o ponto de máximo da PMgL.

■ Ponto D

- Ponto de produto total máximo. Dessa forma já foram esgotados os acréscimos possíveis ao produto, ou seja, o PMgL é igual a zero nesse ponto.

■ Ponto C

- Ponto de máximo do produto médio. Como $PMeL = Q / L$, podemos quantificá-lo em qualquer ponto, como em B, calculando $0-60 / 0-3$. Como tal cálculo mede a inclinação da reta que sai da origem, podemos dizer que o produto médio será máximo no ponto em que tal reta for mais inclinada, o que ocorre no ponto C. Nesse mesmo ponto, os produtos médio e marginal são iguais, pois como a $PMgL$ mede a variação da quantidade proveniente de uma alteração na quantidade de mão-de-obra, ela pode ser calculada, em qualquer ponto, através da inclinação da reta tangente que passa por esse ponto.

Produção com Um Insumo Variável (Trabalho)

Produto
por
mês

30

20

10

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Trabalho por mês

Observações:

Esquerda de E: $PMgL > PMeL$ e $PMeL$ é crescente

Direita de E: $PMgL < PMeL$ e $PMeL$ é decrescente

E: $PMgL = PMeL$ e o $PMeL$ é máximo

Produto Marginal

Produto Médio

E

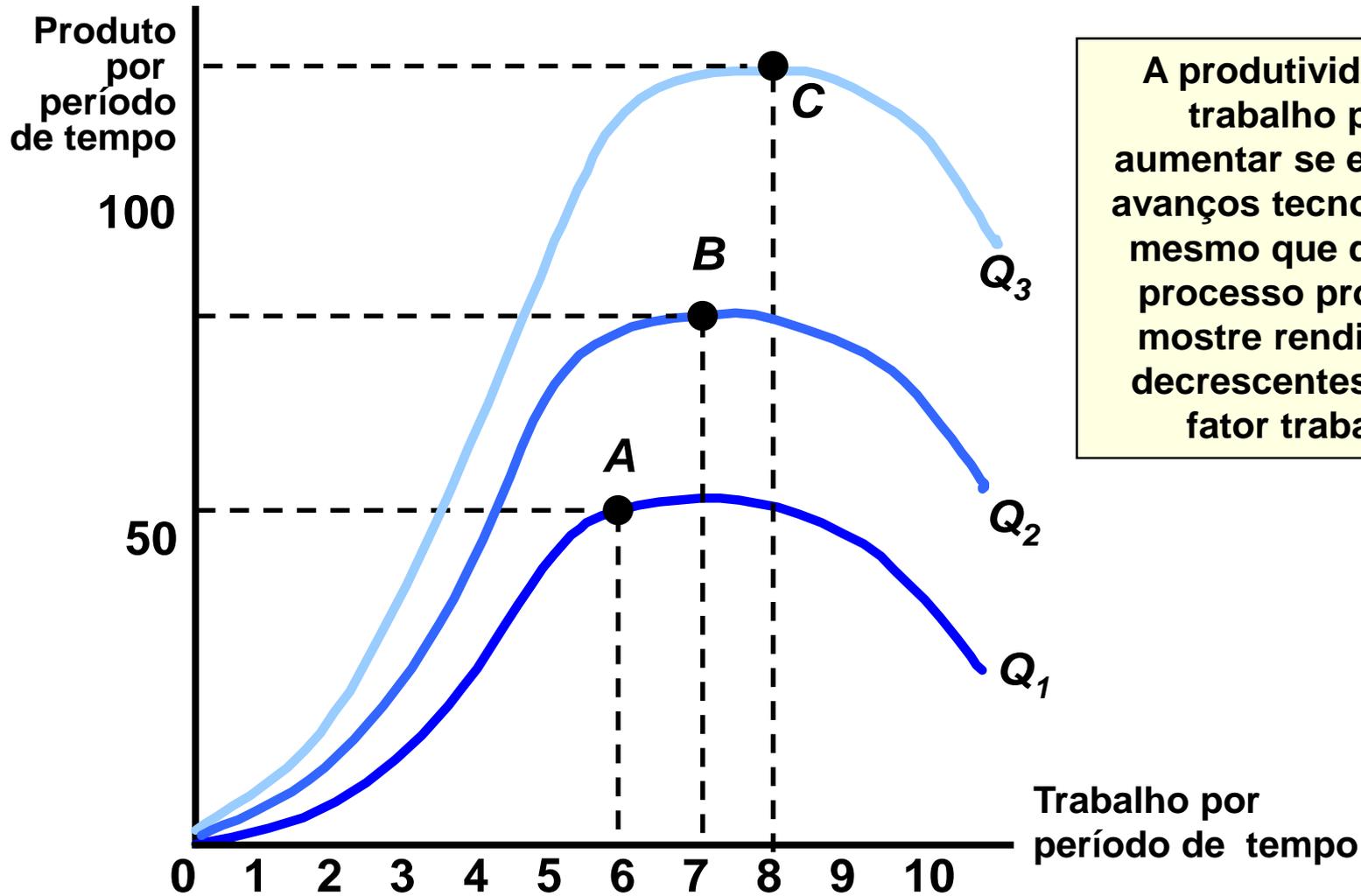
■ Algumas Conclusões:

- Quando a $PMgL = 0$, Q está no seu máximo
- Quando a $PMgL > PMeL$, a $PMeL$ é crescente
- Quando a $PMgL < PMeL$, a $PMeL$ é decrescente
- Quando $PMgL = PMeL$, a $PMeL$ é máxima

A Lei dos Rendimentos Decrescentes

- Pode ser usada nas decisões de longo prazo, para a análise das opções de produção com diferentes tamanhos de fábricas.
- Assume que a qualidade do insumo variável é constante, assim como a tecnologia.
- Descreve um PMgL declinante, mas não necessariamente um PMgL negativo.

O Efeito dos Avanços Tecnológicos



A produtividade do trabalho pode aumentar se existirem avanços tecnológicos, mesmo que qualquer processo produtivo mostre rendimentos decrescentes para o fator trabalho.

Um Exemplo Quantitativo

Seja $Q = -L^3 + 45L^2$ uma função de produção, onde L representa o nº de trabalhadores:

- a) Determine as funções PMgL e PMeL.
- b) Determine o número de trabalhadores para obtermos o máximo da PMeL e da PMgL.
- c) Determine os valores máximos para a PMeL e para a PMgL.
- d) Qual o nível máximo de produto que pode ser obtido ?

Um Exemplo Quantitativo

■ A)

$$PMgL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL} \Rightarrow PMgL = -3L^2 + 90L$$

$$PMeL = \frac{Q}{L} = \frac{-L^3 + 45L^2}{L} \Rightarrow PMeL = -L^2 + 45L$$

Um Exemplo Quantitativo

■ B)

$$\text{máx. } PMgL \Rightarrow \frac{dPMgL}{dL} = 0 \Rightarrow -6L + 90 = 0 \Rightarrow L = 15$$

Checando se é um ponto de máximo:

$$\frac{d^2 PMgL}{dL^2} = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Um Exemplo Quantitativo

■ B)

$$\text{máx. } P_{MeL} \Rightarrow \frac{dP_{MeL}}{dL} = 0 \Rightarrow -2L + 45 = 0 \Rightarrow L = 22,5$$

Checando se é um ponto de máximo:

$$\frac{d^2 P_{MeL}}{dL^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Um Exemplo Quantitativo

■ C)

$$L = 15 \Rightarrow PMgL = -3(15)^2 + 90(15) \Rightarrow$$

$$PMgL_{(15)} = 675$$

$$L = 22,5 \Rightarrow PMeL = \frac{-(22,5)^3 + 45(22,5)^2}{22,5} \Rightarrow$$

$$PMeL_{(22,5)} = 506,25$$

Um Exemplo Quantitativo

■ D)

$$\textit{produto máximo} \Rightarrow PMgL = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dL} = 0$$

$$\frac{dQ}{dL} = 0 \Rightarrow -3L^2 + 90L = 0 \Rightarrow \textit{dois pontos críticos:}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-90 \pm \sqrt{8100 - 0}}{-6} \Rightarrow L_1 = 0 \quad e \quad L_2 = 30$$

Um Exemplo Quantitativo

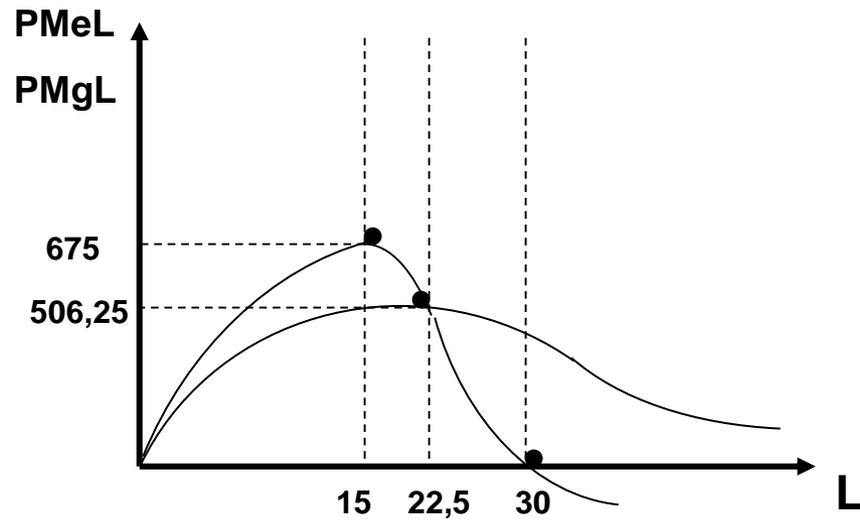
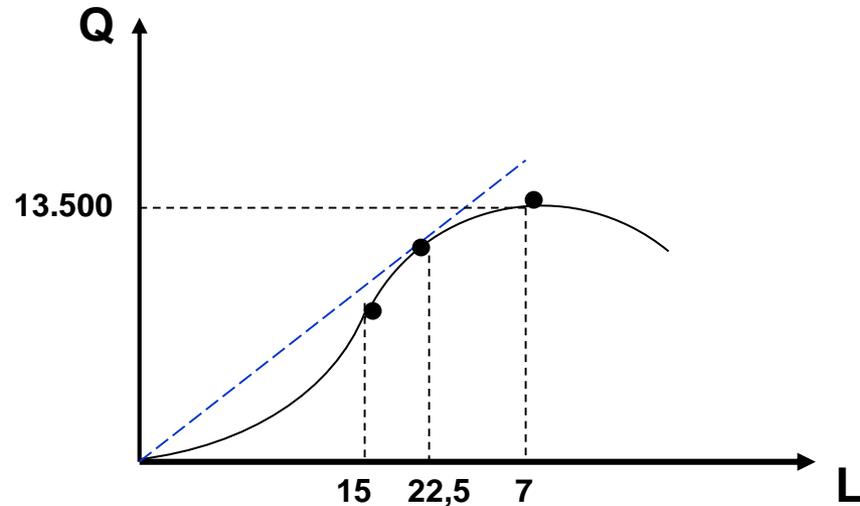
■ D)

checando: $\frac{d^2 Q}{dL^2} = -6L + 90 < 0 \Rightarrow \textit{m\acute{a}ximo}$

com $L = 30 \Rightarrow Q_{m\acute{a}x} = 13500$

- Note que a função de produção possui um ponto de inflexão, para $L = 15$. Com $L < 15$ o produto cresce à taxas crescentes e com $L > 15$ o produto cresce à taxas decrescentes, ou seja, a segunda derivada da função de produção é igual a zero para $L = 15$.

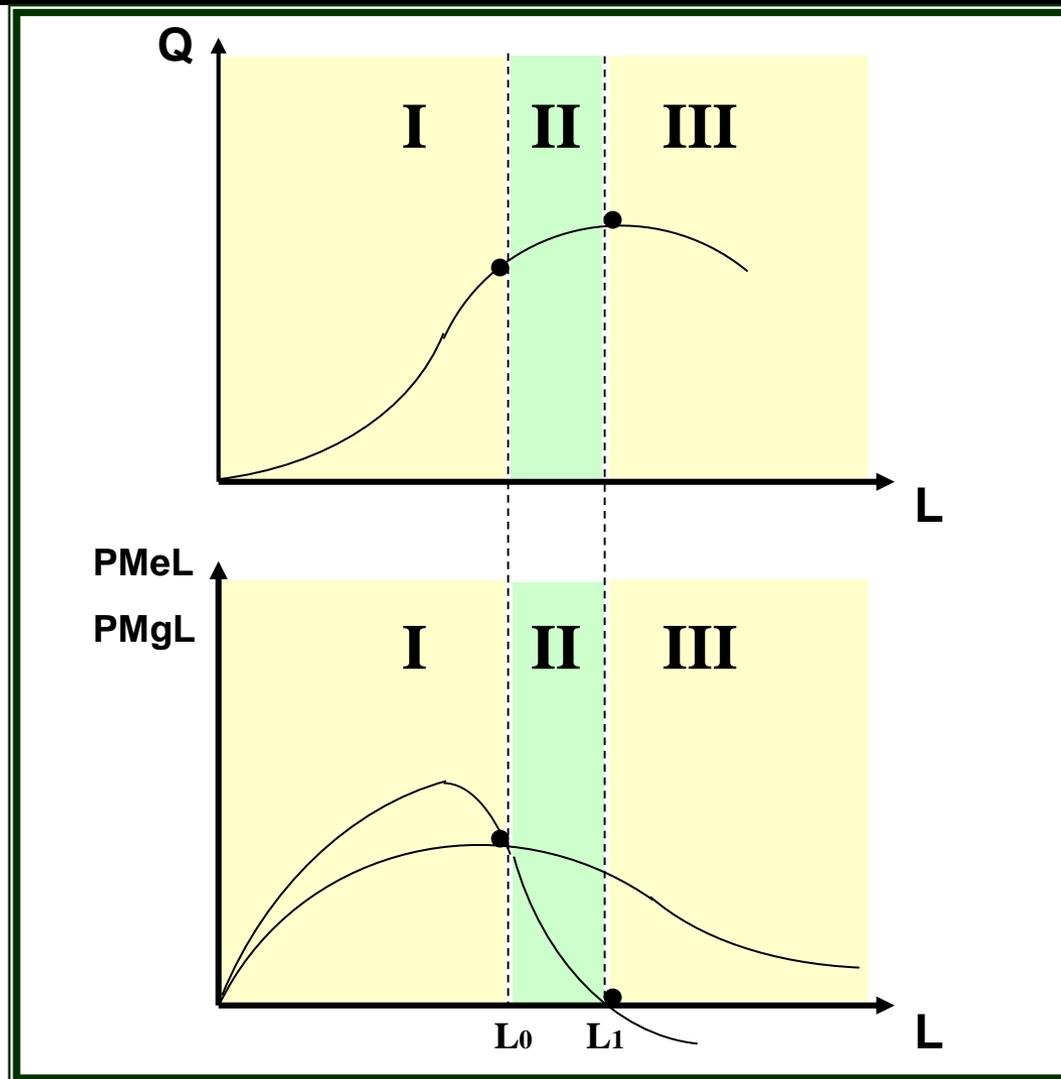
Um Exemplo Quantitativo



Os Estágios de Produção

- Agora que já conhecemos as curvas de produto total médio e marginal, podemos determinar a região econômica de produção. Na verdade, estamos interessados em saber qual a quantidade de mão-de-obra que a firma deve contratar.

Os Estágios de Produção



Os Estágios de Produção

■ Estágio III

- Aqui poderíamos obter uma produção maior diminuindo a quantidade de mão-de-obra. Não faz sentido produzir onde o produto marginal é negativo.

■ Estágio I

- Note que ao aumentar a quantidade de mão-de-obra, a produção aumenta, assim como o produto médio. Dessa forma, trabalhar no estágio I implica em subutilização do estoque de capital.

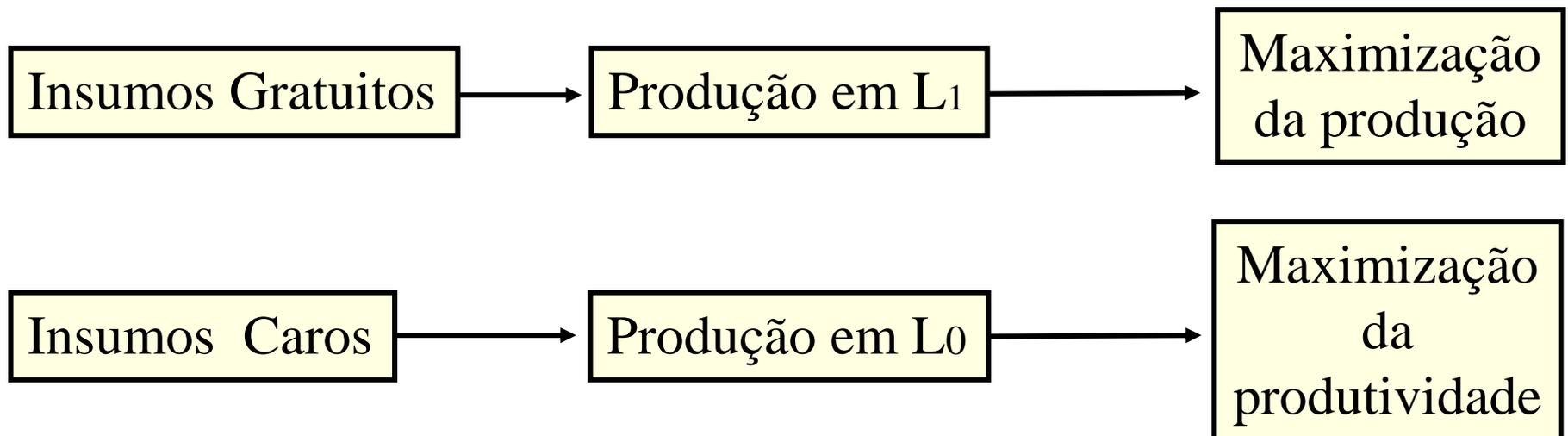
■ Estágio II

- Essa é a região econômica de produção, pois apesar de termos P_{mg} e P_{me} decrescentes, ambos ainda são positivos.

Os Estágios de Produção

■ A Escolha no Estágio II

- A quantidade de mão-de-obra a ser contratada pela firma, dentro do estágio II, depende de:

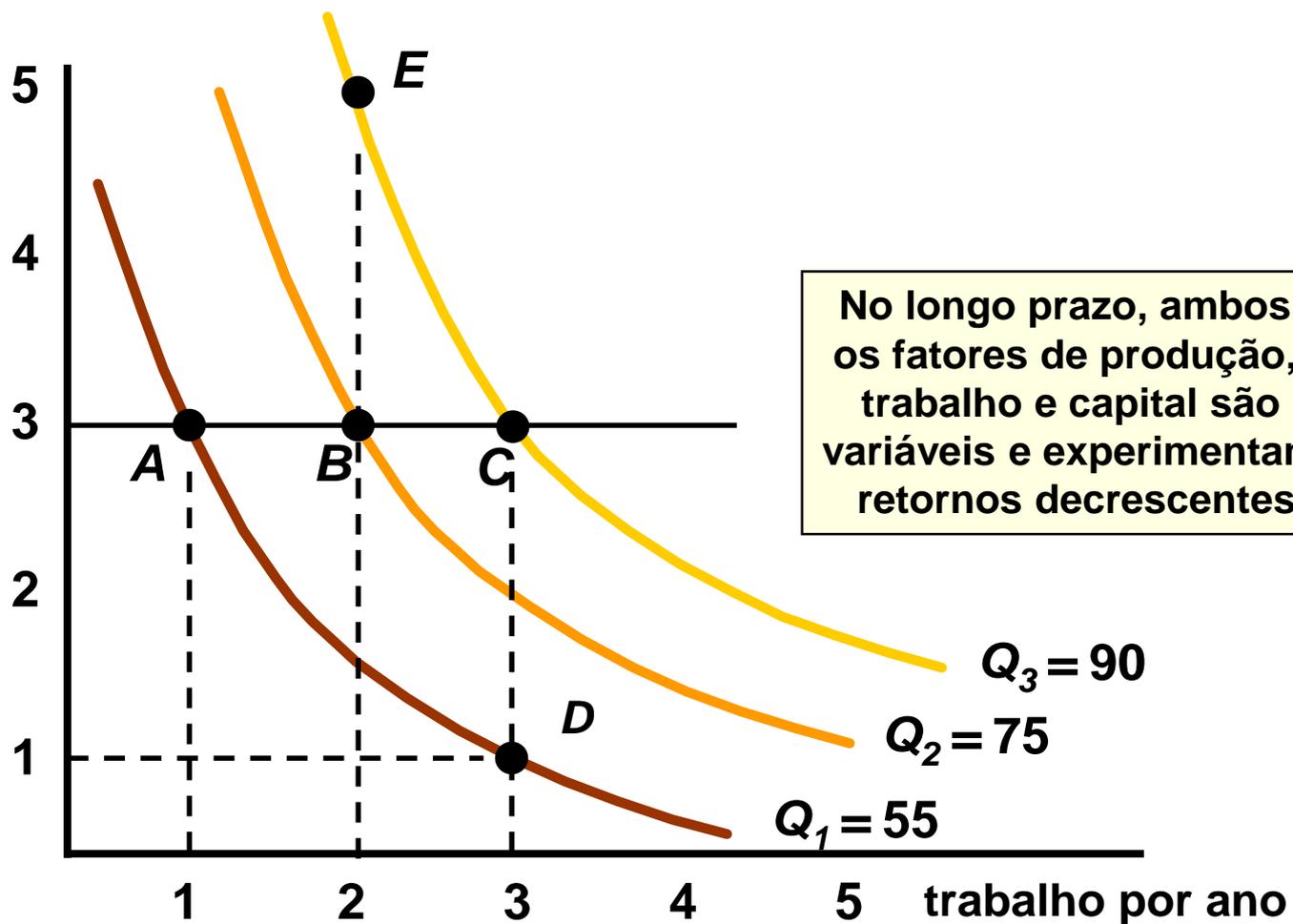


Produção com Dois Insumos Variáveis

- Agora que já estudamos a relação entre produção e produtividade, quando o estoque de capital está fixo, vamos considerar a produção no longo prazo.
 - No longo prazo K e L são variáveis.
 - As Isoquantas analisam e comparam as diferentes combinações de K e L que geram o mesmo nível de produto.

A Forma das Isoquantas

Capital
por ano



- A Substituição entre Insumos
 - Os administradores querem determinar que combinação de insumos devem utilizar.
 - A inclinação da isoquanta mostra o *trade-off* existente entre os dois insumos, mantida a produção constante.

Produção com Dois Insumos Variáveis

- A Substituição entre Insumos
 - A Taxa Marginal de Substituição Técnica

$$TMST_{(K,L)} = - \frac{\Delta K}{\Delta L} = - \frac{dK}{dL} = - \frac{PMgL}{PMgK}$$

→ Para um mesmo nível de Q

Produção com Dois Insumos Variáveis

■ Observações:

● *TMgS* e Produtividade Marginal

- ◆ A variação no produto, dada uma variação no fator trabalho é igual a:

$$(PMgL)(\Delta L)$$

- ◆ A variação no produto, dada uma variação do estoque de capital é igual a:

$$(PMgK)(\Delta K)$$

■ Observações:

● $TMgS$ e Produtividade Marginal

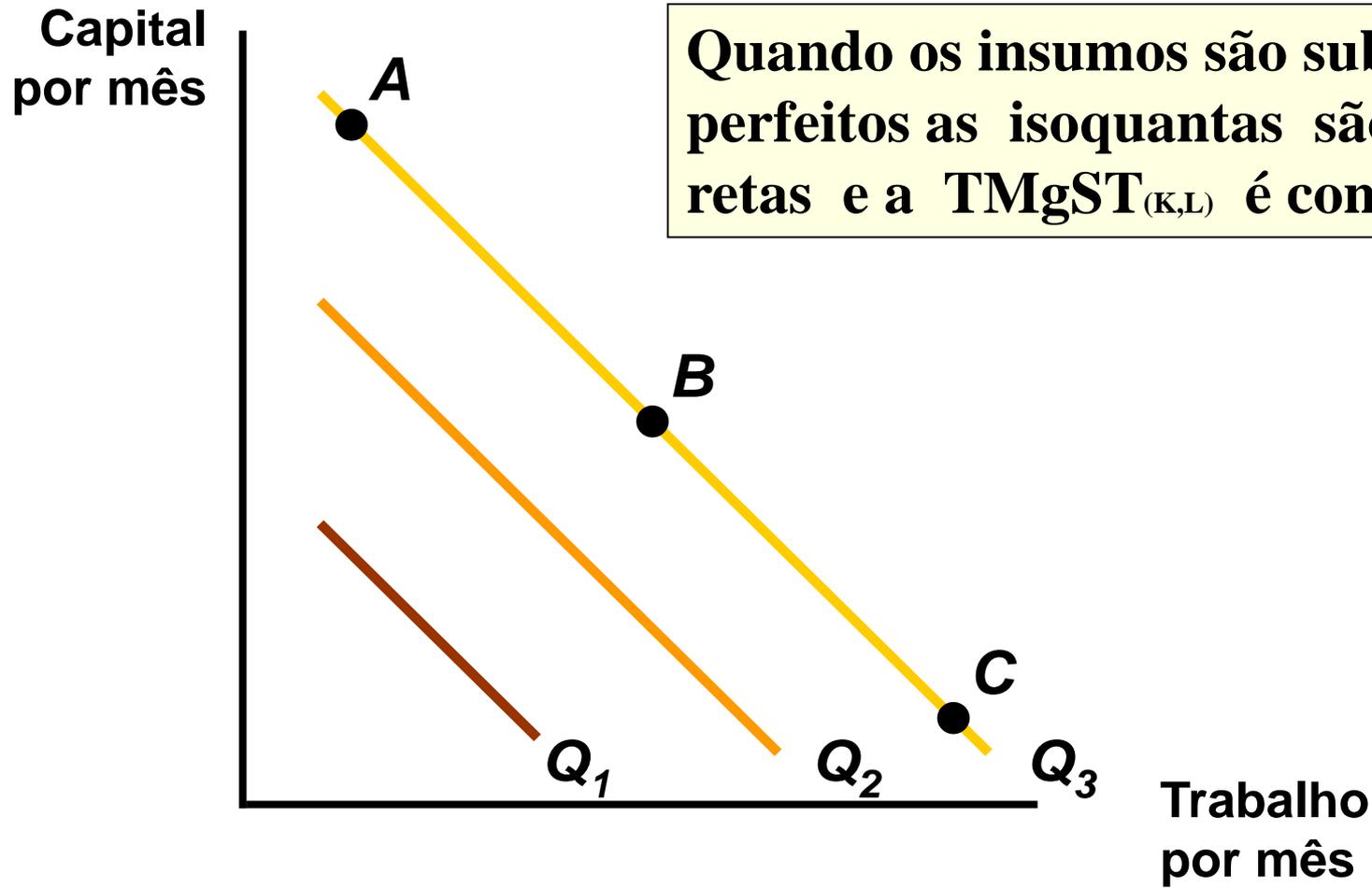
- ◆ Como, ao longo de uma isoquanta, o nível de produção é constante:

Equação da isoquanta

$$(PMgL)(\Delta L) + (PMgK)(\Delta K) = 0$$

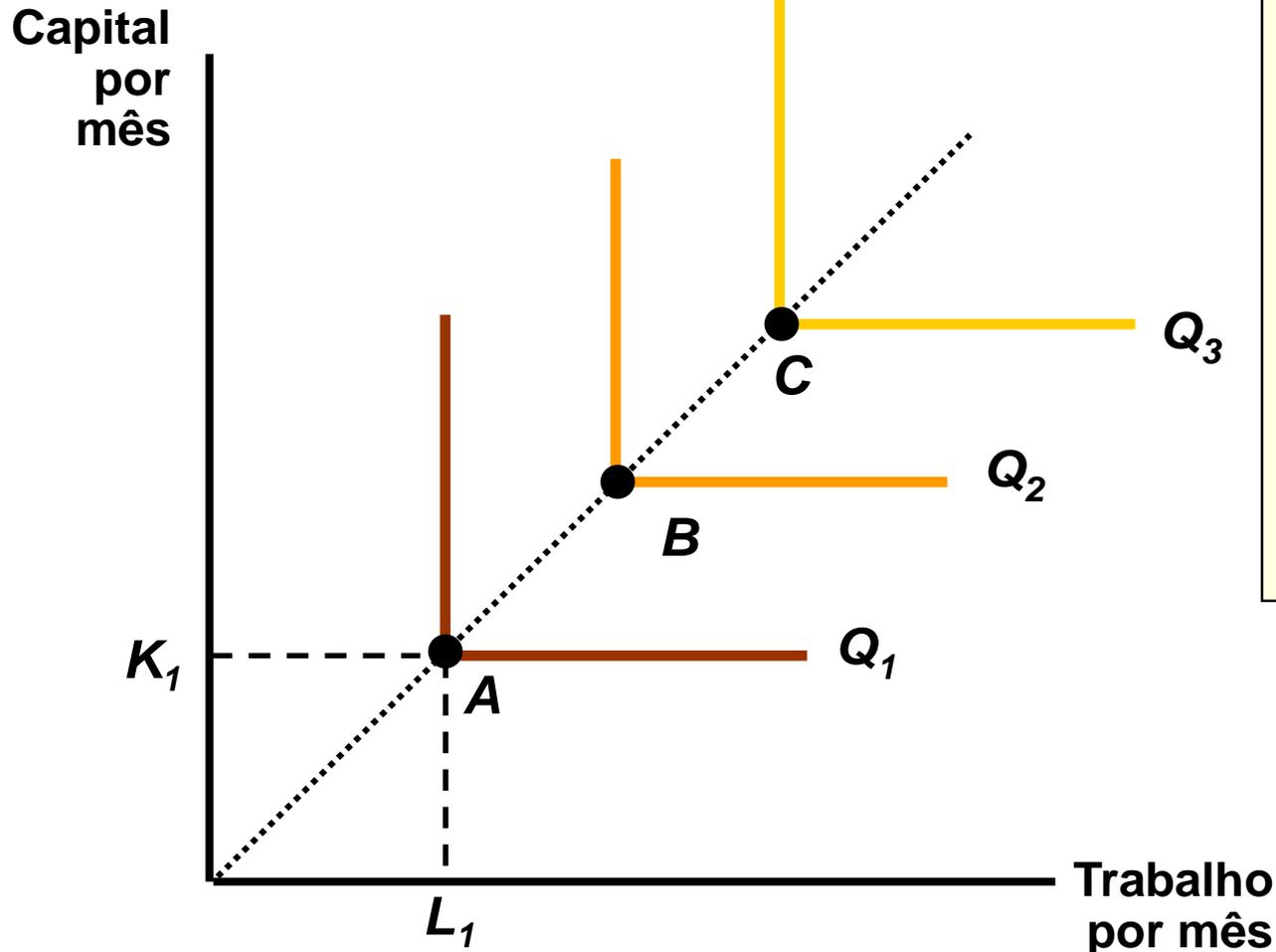
$$TMgST_{(K,L)} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{PMgL}{PMgK}$$

Isoquantas quando os Insumos são Substitutos Perfeitos



Função de Produção de Proporções Fixas

Função de produção de proporções fixas, onde a produção varia de acordo com a variação de ambos os insumos em uma certa proporção fixa. Logo, a $TMgS_{(K,L)} = 0$



Função de Produção de Proporções Fixas

■ Observações:

- Não é possível a substituição entre os insumos capital e trabalho. Cada produção requer uma quantidade específica de cada insumo. Um exemplo disso é o processo produtivo de corte de árvores. Se um homem e uma motosserra cortam 10 árvores, ao adicionarmos uma unidade a mais de trabalho, o número de árvores abatidas permanece constante.

Função de Produção de Proporções Fixas

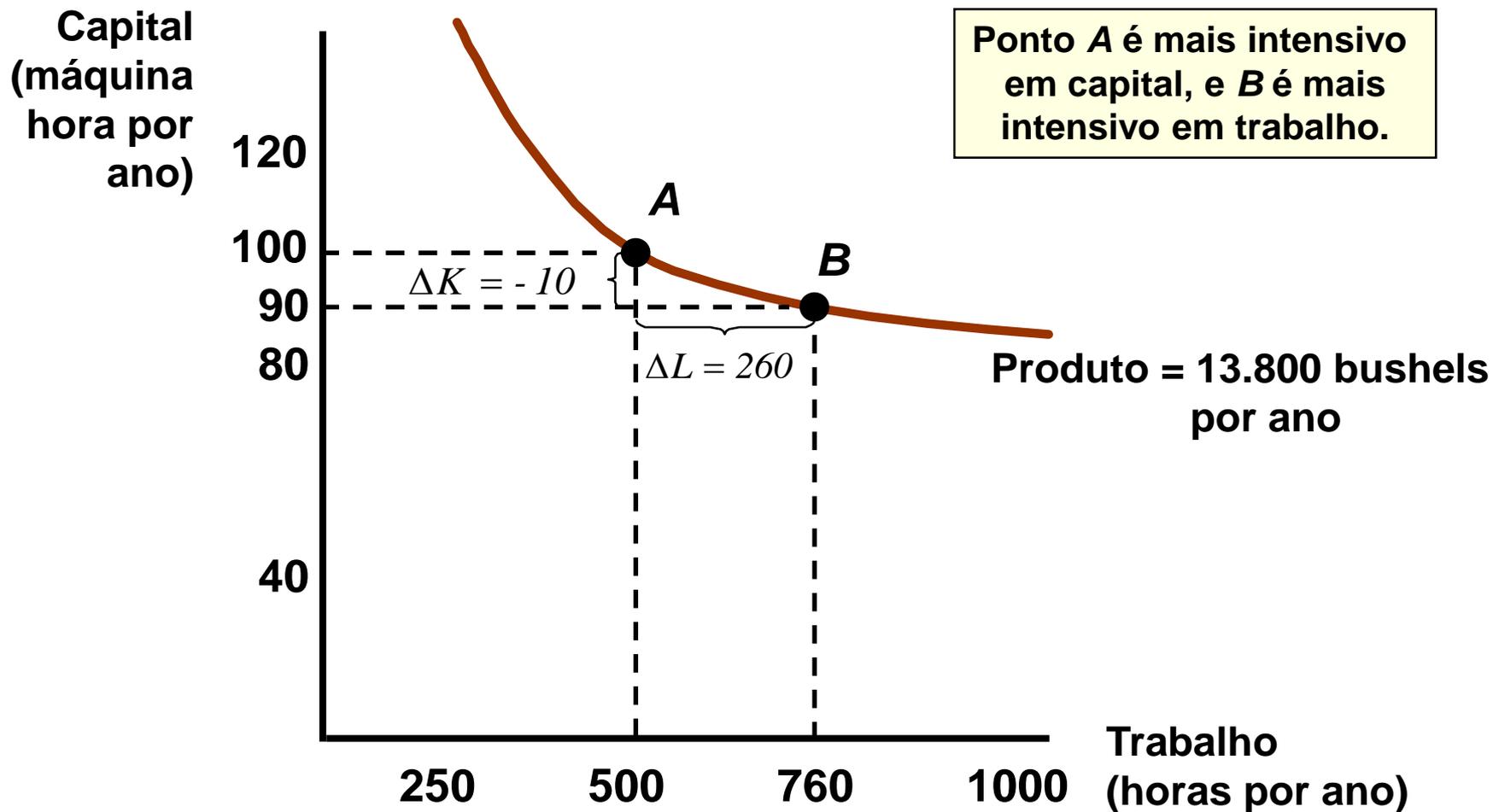
■ Observações:

- O aumento da produção requer mais mão-de-obra e capital. Desta forma a produção aumenta quando nos movemos de *A para B* e *para C*, onde temos combinações de capital e trabalho tecnicamente eficientes.

Uma Função de Produção Para o Trigo

- Os produtores agrícolas devem escolher entre um processo produtivo intensivo em capital ou trabalho.

Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo



Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo

■ Observações:

● Operando em A:

- ◆ $L = 500$ horas e $K = 100$ máquinas horas.

● Operando em B

- ◆ Aumenta L para 760 e diminui K para 90.
Logo, $TMST < 1$:

$$TMgST = - \frac{\Delta K}{\Delta L} = -(10 / 260) = -0,0385$$

Isoquanta que Descreve a Produção de Trigo

■ Observações:

- $TMgST = 0,0385$ significa que, para manter os atuais níveis de produção, seriam necessárias 260 unidades de trabalho para substituir 10 unidades de capital.
- Se a mão-de-obra é cara, o produtor deve utilizar mais capital (Exemplo: E.U.A.).
- Se mão-de-obra é barata, o produtor deve utilizar mais trabalho (Exemplo: Índia).

■ Observações:

- Entretanto, para resolvermos se o melhor processo produtivo envolve uma elevada proporção de capital/trabalho, como nos EUA, ou se envolve uma baixa proporção de capital/trabalho, como na Índia, precisamos conhecer os preços dos insumos, ou seja, precisamos conhecer os custos de produção. Trataremos desse assunto no próximo capítulo.

Rendimentos de Escala

- Sendo os dois insumos variáveis (Longo Prazo), devemos nos perguntar qual o impacto sobre a produção de uma **alteração proporcional em ambos os insumos**. Tal alteração é chamada de mudança na **escala de produção**, e pode gerar três resultados:

Rendimentos de Escala

■ Rendimentos Crescentes de Escala

- Ao variarmos ambos os insumos proporcionalmente, a produção varia mais que proporcionalmente.

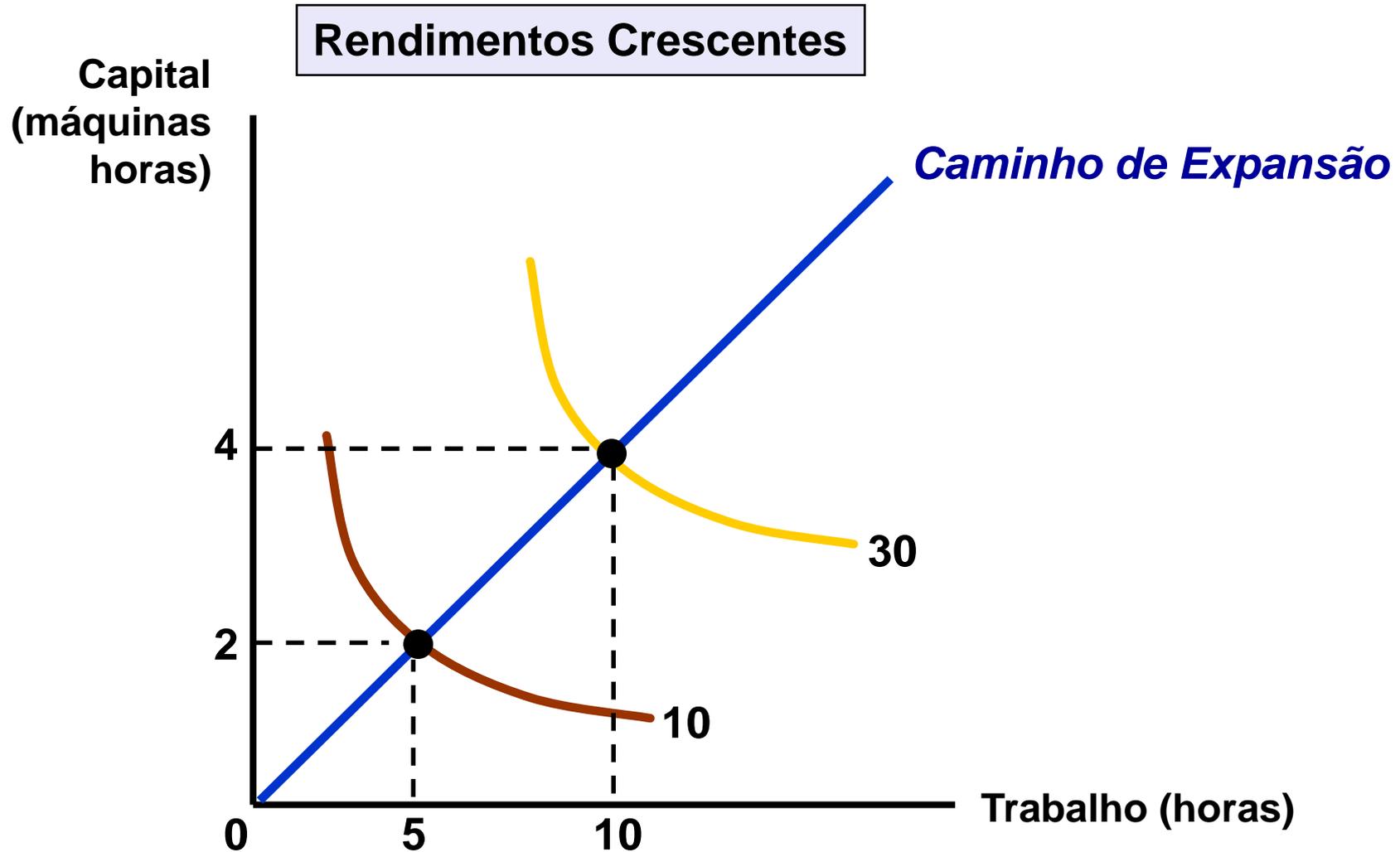
■ Rendimentos Constantes de Escala

- Ao variarmos ambos os insumos proporcionalmente, a produção também varia proporcionalmente.

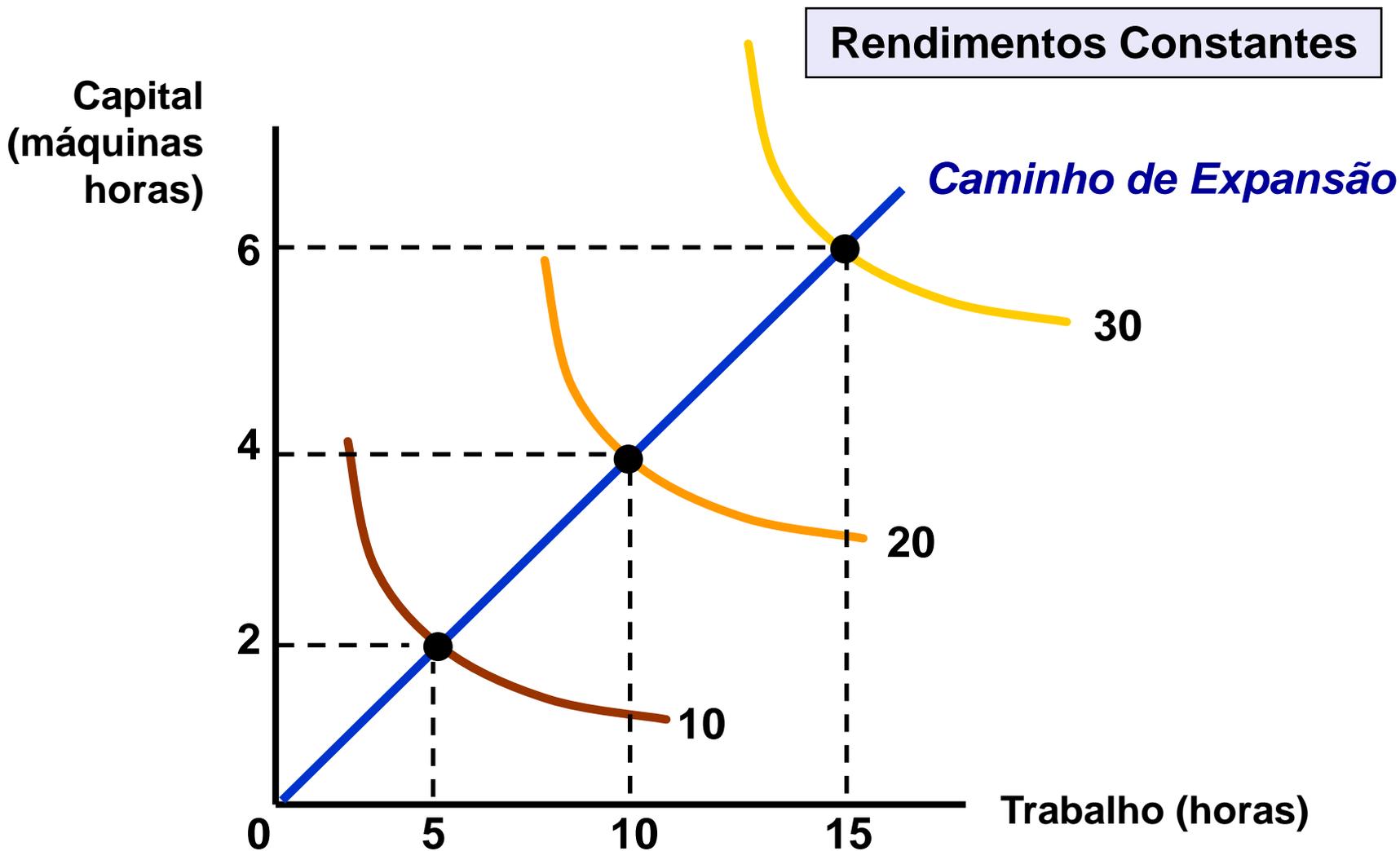
■ Rendimentos Decrescentes de Escala

- Ao variarmos ambos os insumos proporcionalmente, a produção varia menos que proporcionalmente.

Rendimentos de Escala

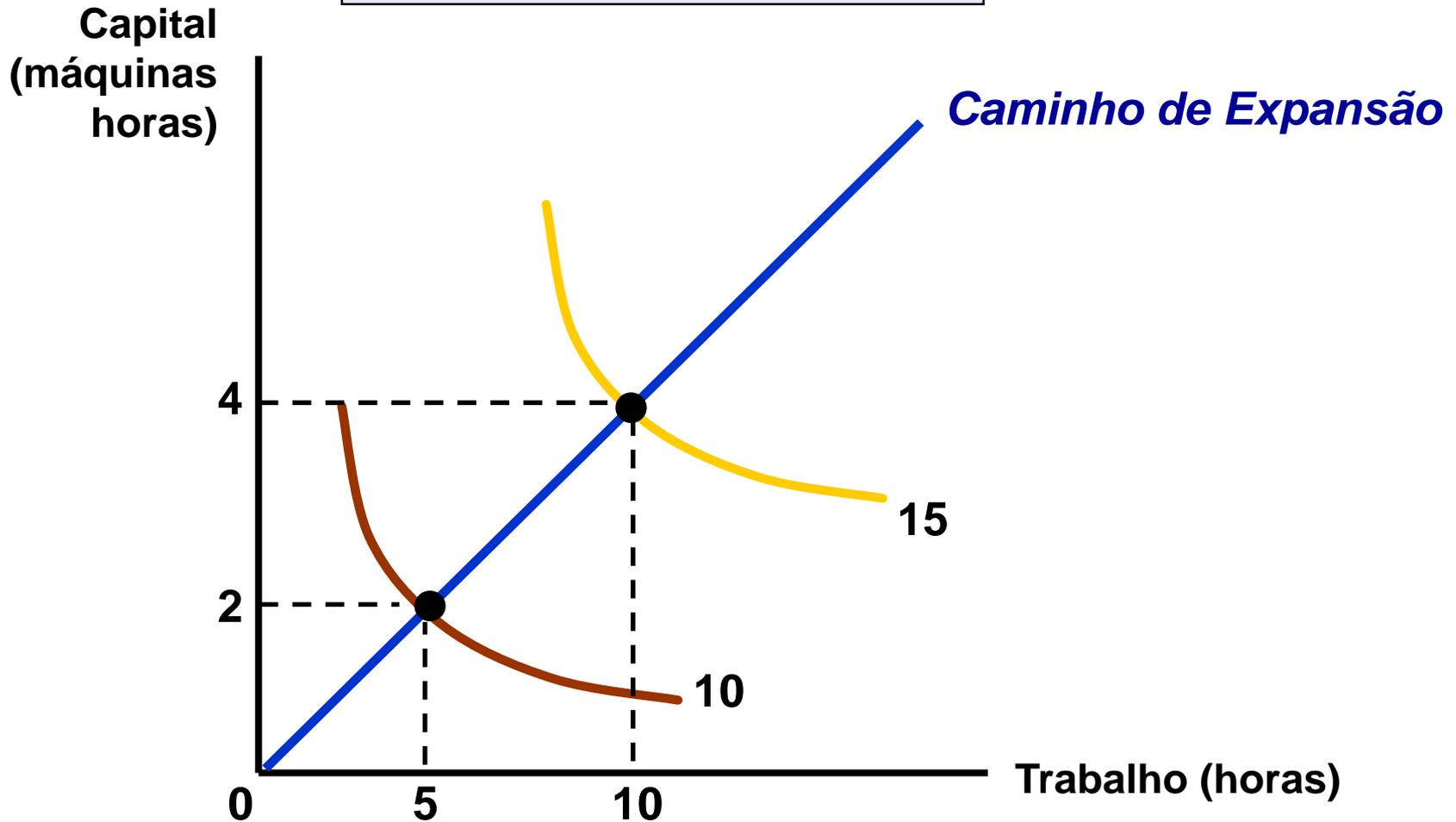


Rendimentos de Escala



Rendimentos de Escala

Rendimentos Decrescentes



Razões Para a Existência de Economias de Escala

- Indivisibilidade de Equipamentos e da Própria Planta
 - Certos tipos de maquinárias e de disposição (*layout*) da planta só são economicamente factíveis após determinados tamanhos mínimos, de modo que plantas menores devem utilizar máquinas ou disposições internas com menor eficiência.
- Indivisibilidade de Financiamentos
 - Maiores financiamentos, menores os custos unitários.
- Indivisibilidade de Operações Mercadológicas
 - Evidentemente, antes que as atividades mercadológicas e de pesquisa possam alcançar seu dimensionamento ótimo e, conseqüentemente, possam ser atingidos custos unitários menores, há necessidade de que tanto a produção como o nível de vendas atinjam uma certa magnitude.

Razões Para a Existência de Economias de Escala

■ Preços Reduzidos dos Fatores

- Aquisições de matérias-primas em grandes quantidades propiciam, geralmente, menores custos unitários.

■ Benefícios Organizacionais

- Derivados da eficiência de uma melhor coordenação e planejamento das atividades da firma.

■ Especialização do Trabalho

- À medida que o processo cresce e pode ser realizado por partes, cresce a especialização do trabalho, com aumento da produtividade e redução de custos.

■ Perda de Eficiência

- Em decorrência da complexidade crescente assumida pelas atividades de coordenação e organização da firma.

■ Custos Crescentes dos Fatores não Reprodutivos

- Tais como valores de arrendamento, de organização do trabalho e de aperfeiçoamento da mão-de-obra.

■ Desenvolvimento de Funções Subsidiárias

- Tais como as despesas jurídicas ou legais e dispêndios com relações públicas.

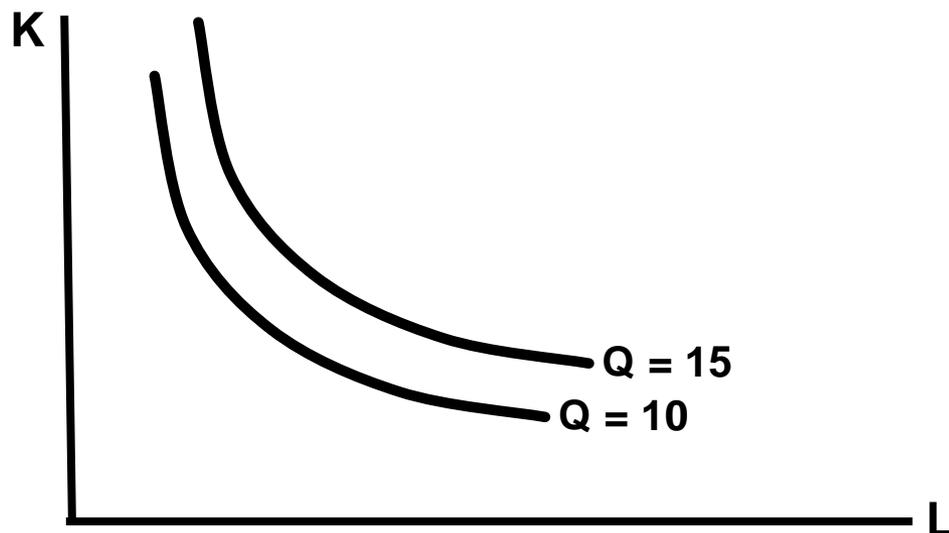
- A abordagem desenvolvida anteriormente para o longo prazo foi bastante intuitiva.
- Agora, veremos, de maneira mais formal, alguns tópicos importantes, relativos a algumas funções de produção específicas.

Função de Produção Cobb-Douglas

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

■ Isoquantas Convexas

- Existe substitutibilidade imperfeita entre os fatores de produção.



Função de Produção Cobb-Douglas

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

■ Rendimentos de Escala

- Multiplique os fatores de produção rivais por uma constante arbitrária e observe o resultado.

$$Q = A(\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{\beta} \Rightarrow [AK^{\alpha} L^{\beta}] \lambda^{\alpha+\beta} \Rightarrow Q\lambda^{\alpha+\beta}$$

■ Logo:

- Se $(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow$ Rendimentos Constantes de Escala
- Se $(\alpha + \beta) > 1 \Rightarrow$ Rendimentos Crescentes de Escala
- Se $(\alpha + \beta) < 1 \Rightarrow$ Rendimentos Decrescentes de Escala

Função de Produção Cobb-Douglas

■ Produtividades Marginais e $TMgS_{(K,L)}$

$$PMgL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1}$$

$$PMgK = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta$$

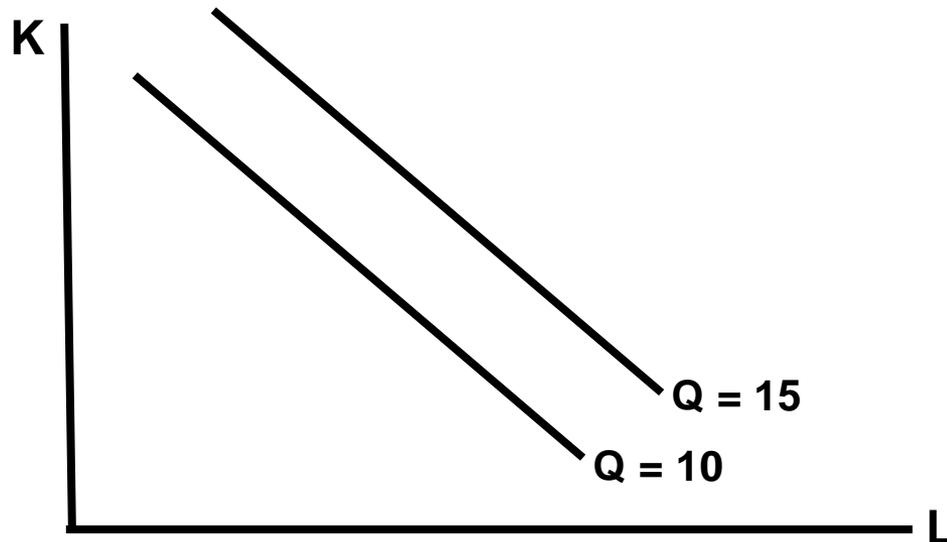
$$TMgS_{(K,L)} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{PMgL}{PMgK} = -\frac{\beta AK^\alpha L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1} L^\beta} = -\frac{\beta K}{\alpha L}$$

Função de Produção Linear

$$Q = \alpha K + \beta L$$

■ As Isoquantas são Retas

- Existe substitutibilidade perfeita entre os fatores de produção.



Função de Produção Linear

Rendimentos Constantes de Escala

$$Q = \alpha K + \beta L \rightarrow \alpha \lambda K + \beta \lambda L \Rightarrow \lambda (\alpha K + \beta L) = \lambda Q$$

$$PMg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta$$

$$PMg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha$$

$$TMgS_{(K,L)} = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = - \frac{PMg_L}{PMg_K} = - \frac{\beta}{\alpha}$$

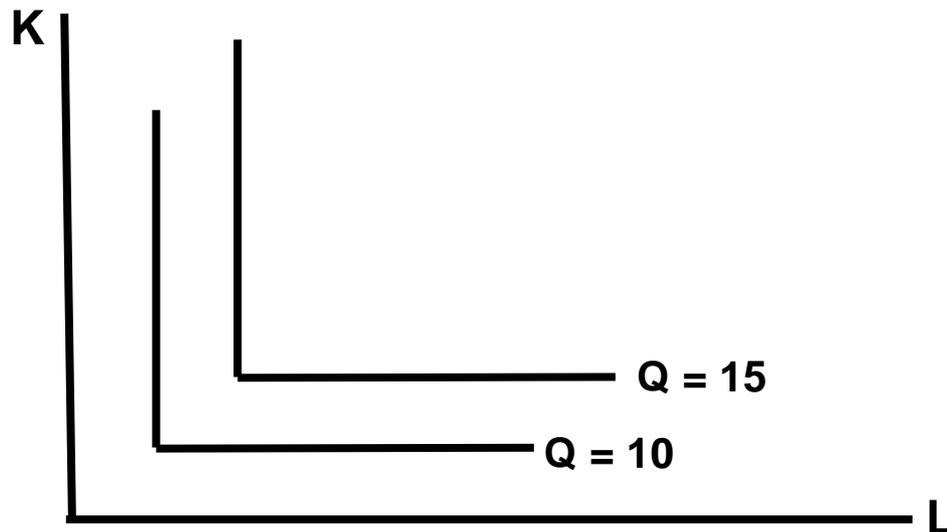
Inclinação constante das isoquantas

Função de Produção de Leontief

$$Q = \min \{ \alpha K, \beta L \}$$

■ As Isoquantas Possuem a Forma de L

- Não existe substitutibilidade entre os fatores de produção.



Função de Produção de Leontief

Rendimentos Constantes de Escala

$$Q = \min \{ \alpha K, \beta L \} \rightarrow \min \{ \alpha \lambda K, \beta \lambda L \} \Rightarrow \lambda \min \{ \alpha K, \beta L \} = \lambda Q$$

$$PMg_K = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha K > \beta L \\ \alpha & \text{se } \alpha K < \beta L \end{cases}$$

$$PMg_L = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta L > \alpha K \\ \beta & \text{se } \beta L < \alpha K \end{cases}$$

$$TMgS_{(K,L)} = 0$$

- Cuidado: nem todas as funções onde os bens são complementos perfeitos apresentam retornos constantes de escala. Em um caso mais geral, os rendimentos de escala podem ser crescentes, constantes ou decrescentes.
- Seja a FDP dada por $Q = [\min\{\alpha K, \beta L\}]^a$
 $\rightarrow [\min\{(\lambda\alpha K), (\lambda\beta L)\}]^a \Rightarrow \lambda^a [\min\{\alpha K, \beta L\}]^a \Rightarrow \lambda^a Q$
 - Logo, os retornos de escala dependem de a .

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

- **Opcional**

- A elasticidade de substituição é uma medida que pode nos ajudar a descrever a oportunidade de substituição entre os fatores de produção.
- Ela nos mostra a variação percentual na relação capital/trabalho induzida por uma mudança de 1 ponto percentual na taxa marginal de substituição técnica, ao longo de uma isoquanta.
- Note que, conforme nos movemos ao longo da isoquanta, substituindo capital por trabalho a relação K/L vai diminuindo, assim como a taxa marginal de substituição técnica (lembre-se que a $TMgs$ é decrescente).

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

■ Elasticidade de Substituição = σ

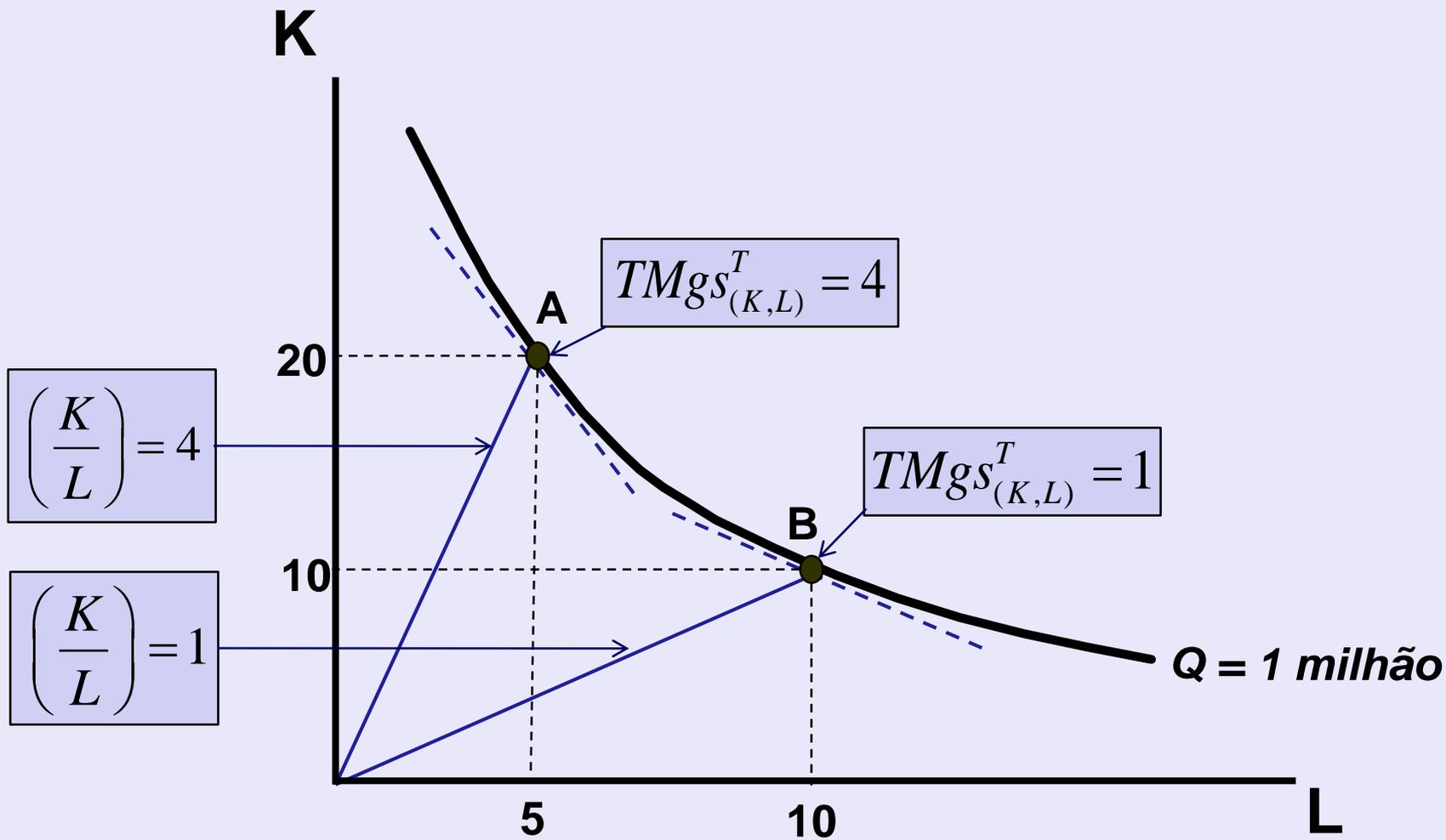
$$\sigma = \frac{\text{Variação Percentual na relação capital-trabalho}}{\text{Variação Percentual na TMgS}_{(K,L)}}$$

$$\sigma = \frac{\% \Delta \left(\frac{K}{L} \right)}{\% \Delta TMg_S^T} = \frac{d \ln \left(\frac{K}{L} \right)}{d \ln TMg_S^T}$$

OBS. A derivada do logaritmo natural de uma variável nos fornece, aproximadamente, a variação percentual dessa variável. Logo, muitas vezes, é mais conveniente aplicarmos log, seja por esse motivo, seja pelo fato de que a aplicação de log nos permite linearizar a função.

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)



A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

- De um modo geral a FDP ESC pode ser apresentada como:

$$Q = A \left[aK^\rho + bL^\rho \right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}},$$

com A, a e $b > 0$, $\rho < 1$ e $\varepsilon > 0$

- Em equilíbrio:

$$TMgS_{(K,L)}^T = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{w}{r}$$

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

■ Relembrando:

■ Eq. da isoquanta: $\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{PMgL}{PMgK}$

Logo, se $Q = A \left[aK^\rho + bL^\rho \right]^\frac{\varepsilon}{\rho}$

$$TMgS_{(K,L)}^T = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) A \left[aK^\rho + bL^\rho \right]^\frac{\varepsilon}{\rho}-1 \cdot \rho bL^{\rho-1}}{\left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) A \left[aK^\rho + bL^\rho \right]^\frac{\varepsilon}{\rho}-1 \cdot \rho aK^{\rho-1}} = \frac{a}{b} \left(\frac{K}{L} \right)^{1-\rho}$$

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

- Aplicando log, temos:

$$\ln TMgS_{(K,L)}^T = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + (1 - \rho) \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$(1 - \rho) \ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln TMgS_{(K,L)}^T - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{1}{1 - \rho}\right) \ln TMgS_{(K,L)}^T - \left(\frac{1}{1 - \rho}\right) \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

- Aplicando a definição de elasticidade de substituição:

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

$$\sigma = \frac{d \ln \left(\frac{K}{L} \right)}{d \ln TMg_S^T} = \frac{1}{1 - \rho}$$

Logo:

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma \rightarrow 1$$

$$\rho \rightarrow 1 \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty$$

$$\rho \rightarrow -\infty \Rightarrow \sigma \rightarrow 0$$

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

- Escrevendo de outro modo:

$$Q = A \left[aK^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + bL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\text{Lembre-se que } \sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

Se $\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow$ substitutos perfeitos

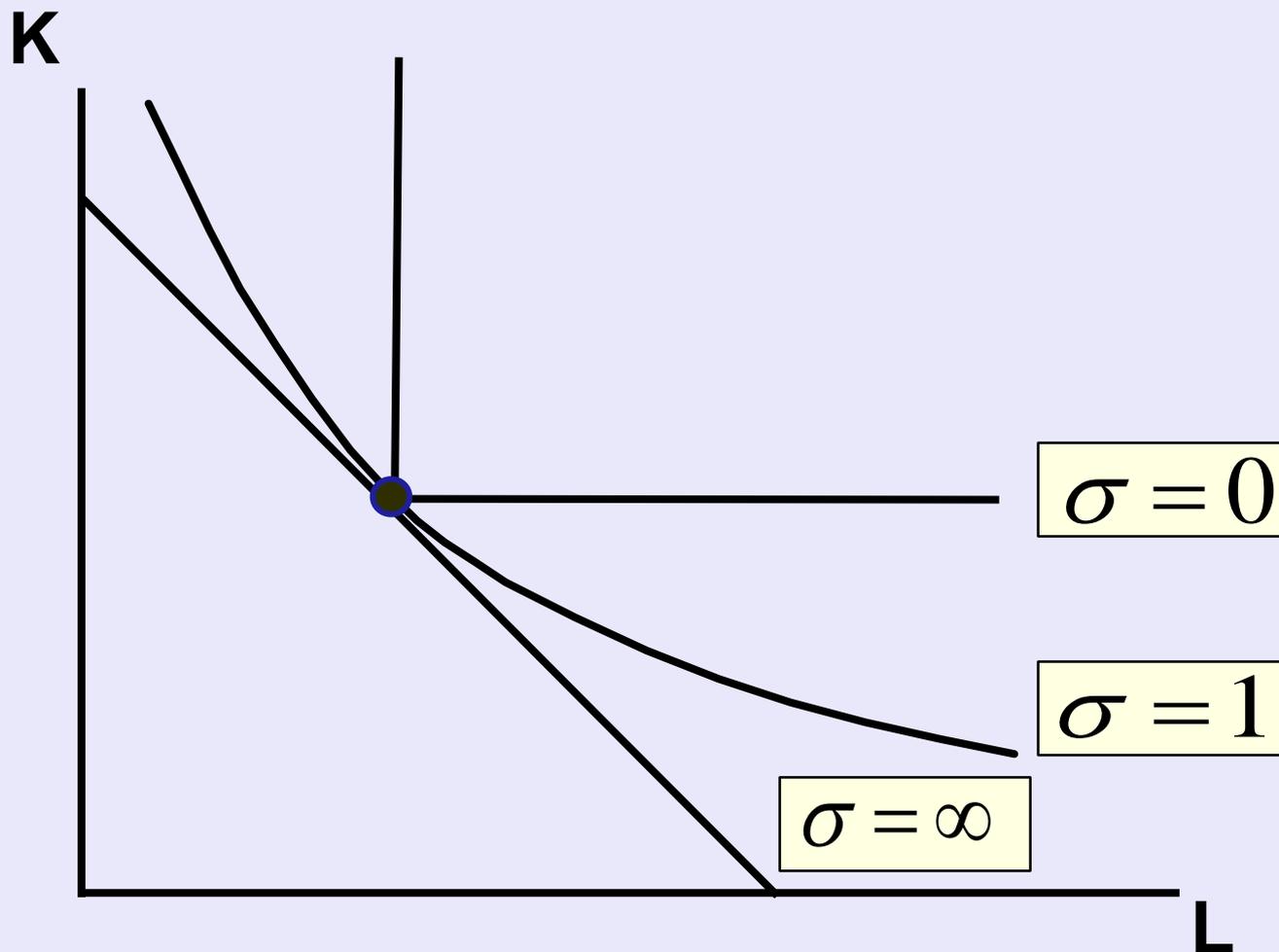
Se $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow$ complementares perfeitos

Se $\sigma = 1 \Rightarrow$ Cobb-Douglas

- Observe que, dependendo da elasticidade de substituição, a função de produção ESC pode representar os três casos mais comuns com os quais trabalhamos em microeconomia.

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)



A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

$$\text{Cobb-Douglas: } Q = AK^\alpha L^\beta$$

$$TMgS_{(K,L)}^T = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\beta AK^\alpha L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1} L^\beta} \Rightarrow TMgS_{(K,L)}^T = \frac{\beta}{\alpha} \frac{K}{L}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \bullet TMgS_{(K,L)}^T \cdot \text{Aplicando log}$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln TMgS_{(K,L)}^T$$

$$\sigma = \frac{d \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d \ln TMgS_{(K,L)}^T} = 1$$

Logo, uma Cobb-Douglas possui elasticidade de substituição constante, igual a 1.

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

Elasticidade Escala = ε

Multiplicando ambos os fatores de produção por uma constante positiva λ :

$$Q = A \left[aK^\rho + bL^\rho \right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \left[(\lambda aK)^\rho + (\lambda bL)^\rho \right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \left[\lambda^\rho (aK^\rho + bL^\rho) \right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow \lambda^{\rho \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)} Q \Rightarrow \boxed{\lambda^\varepsilon Q}$$

Logo $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \Rightarrow RCE \\ \varepsilon > 1 \Rightarrow RCrE \\ \varepsilon < 1 \Rightarrow RDE \end{array} \right.$

Assim, a existência de rendimentos constantes, crescentes ou decrescentes de escala depende de ε .

A Função de Produção ESC

(Elasticidade de Substituição Constante)

■ Exemplo. Suponha que:

$$Q = [K^{0,5} + L^{0,5}]^2 \Rightarrow Q = [K^{0,5} + L^{0,5}]^{\frac{1}{0,5}} \Rightarrow \varepsilon = 1 \text{ e } \rho = 0,5.$$

Assim, a FDP apresenta retornos constantes de escala .

Como $\sigma = 1/1-\rho$, temos: $\sigma = 1/1-0,5 \Rightarrow \sigma = 2$.

Concurso ANPEC – 2013 – Questão 6

(Dado o que vimos, as respostas são automáticas)

- Considere a teoria da produção e indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

- a) Se a função de produção for $f(K, L) = [K^a + L^a]^{v/a}$, com $a \leq 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, ela apresenta retornos crescentes de escala. **V**
- b) O coeficiente de elasticidade de substituição σ de uma função de produção como $f(K, L) = [K^a + L^a]^{v/a}$, com $a < 1$, $a \neq 0$ e $v > 1$, é $\sigma = 1/(1-a)$. **V**

- c) Funções de produção com elasticidade de substituição $\sigma = 0$ possuem isoquantas em formato de L. **V**
- d) Se a tecnologia for monotônica, isso significa que não é possível produzir ao menos a mesma quantidade aumentando a quantidade de um dos insumos.

(F) Consumidor: Mais de um dos bens, maior utilidade.

Produção: Mais de um dos insumos, maior produção

- c) Funções de produção do tipo Cobb-Douglas possuem elasticidade de substituição $\sigma = 1$. **V**

■ (ANP - 2008 - CESGRANRIO) - 42

- A função de produção $Q = A(aK + bL)^{0,5}$, onde Q é o produto, K e L são os fatores de produção, e A, a e b são parâmetros com as unidades adequadas, apresenta

- (A) fatores de produção substitutos perfeitos.
- (B) retornos crescentes de escala.
- (C) aumento de produtividade, se A for positivo.
- (D) produtividade marginal crescente do fator K.
- (E) homogeneidade de grau um.

Formato Geral da ESC

$$Q = A \left[aK^\rho + bL^\rho \right]^{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

Logo :

$$Q = A \left[aK^1 + bL^1 \right]^{\frac{0,5}{1}} \Rightarrow RDE$$

$$\rho = 1 \text{ e } \sigma = \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty \Rightarrow \textit{Substitutos Perfeitos}$$

- **(BNDES 2007 - CESGRANRIO) - 33**
- A função de produção $Q = \min(aK, bL)$, onde $Q =$ produto, $K =$ fator capital, $L =$ fator trabalho e a e b são parâmetros, apresenta
 - (A) retornos crescentes de escala se $a + b > 1$.
 - (B)** retornos constantes de escala.
 - (C) fatores de produção perfeitamente substitutos.
 - (D) inovação tecnológica se $a > b$.
 - (E) cada isoquanta como uma linha reta.

Como vimos, a função de Leontief apresenta retornos constantes de escala, possui isoquantas em formato de L e a $TMgS_{(K,L)} = 0$.